

BRONKA RZEPKOWSKI<sup>1</sup>

# LA CRÉDIBILITÉ DU MÉCANISME DE CHANGE EUROPÉEN À BANDES ÉLARGIES

**RÉSUMÉ.** Les tests traditionnels de crédibilité des régimes de zone cible, visant à déterminer la probabilité de réalignement d'une monnaie dans le mécanisme de change européen, ne sont plus pertinents depuis l'élargissement des marges de fluctuation le 2 août 1993. Les banques centrales ont donc été amenées à considérer d'autres indicateurs pour étudier l'évolution des anticipations du marché. Les marchés dérivés d'options de change offrent une information nouvelle au contenu informationnel important sur les anticipations de change des opérateurs. Deux indicateurs, issus de ces marchés, sont désormais suivis par de nombreuses banques centrales : la volatilité implicite et le *risk reversal*. La volatilité implicite indique le niveau de variabilité anticipé par le marché d'une devise pour une échéance donnée, tandis que le *risk reversal* fournit une information sur l'asymétrie des anticipations de forte appréciation ou de forte dépréciation. Néanmoins, ces deux indicateurs directement tirés du marché de gré à gré ne fournissent qu'une information par-

tielle sur la distribution de probabilité des cours de change anticipés.

Or, à condition de formuler un certain nombre d'hypothèses, il est possible d'extraire entièrement la densité de probabilité du taux de change futur à partir des prix d'options. Cette densité permet de disposer d'un résumé des anticipations sur les niveaux possibles des cours de change ainsi que les probabilités (risque neutre) respectives que les marchés leur affectent.

L'article considère, dans un premier temps, ces différentes hypothèses afin de déterminer le modèle qui s'ajusterait le mieux aux prix des options cotées. De cette comparaison des différents modèles, il ressort que le modèle à saut et l'approche postulant que la densité empirique est constituée d'un mélange de deux lois lognormales fournissent les meilleurs résultats. Le modèle à saut a été privilégié en raison de la lisibilité des paramètres estimés, qui nous donne une information sur la dynamique du taux de change anticipé : la probabilité qu'un saut ait lieu, ainsi que l'ampleur de ce saut.

La densité de probabilité du taux de

1. BRONKA RZEPKOWSKI est chargée de mission à la direction des Changes, Banque de France et doctorante à l'université de Paris X -Nanterre (Mini Forum).

change futur peut être utilisée par les banques centrales poursuivant un objectif de change. Par exemple, dans le cas de la France, la modification des anticipations après la dissolution de l'Assemblée nationale le 21 avril 1997 et après les résultats des élections législatives du 1<sup>er</sup> juin 1997, est illustrée par le suivi de différents indicateurs : la densité de probabilité, les marges implicites anticipées issues de la distribution des taux de change futurs, un indicateur de la structure à terme de la dispersion des anticipations et des indicateurs d'asymétrie de la densité.

En outre, ces indicateurs extraits des marchés dérivés peuvent être particulièrement utiles pour les banques centrales désirant suivre l'évolution des anticipations pendant la période intérimaire jusqu'à l'ins-

tauration de la monnaie unique. Les densités de probabilité des taux de change européens peuvent en effet fournir une indication sur le degré de validation par les marchés des taux de conversion bilatéraux qui seront annoncés en mai 1998. Les marges implicites peuvent également rendre compte de la crédibilité de l'annonce du Conseil européen : si celle-ci est bien accueillie par le marché, la bande anticipée devrait considérablement se réduire plus l'échéance du 1<sup>er</sup> janvier approche, pour se concentrer sur les cours annoncés. L'étude des densités pour une échéance postérieure au 1<sup>er</sup> janvier 1999 montre que le marché centre déjà ses anticipations sur le cours pivot du mark contre franc.

*Classification JEL* : C52, F31, G14, G15

Jusqu'au 2 août 1993, le SME a fonctionné avec des marges de fluctuation des taux de change de  $\pm 2,25\%$  autour des cours pivots, pour la majorité des monnaies participantes. Mesurer la crédibilité d'un tel régime de change, qualifié de zone cible, a motivé de nombreuses recherches théoriques basées sur le modèle de P. Krugman (1991). Des extensions de ce modèle ont introduit la crédibilité imparfaite, parmi celles-ci Bertola et Caballero (1992), Chen et Giovanni (1992) ainsi que Bertola et Svensson (1993). A partir de cette littérature, des études empiriques ont tenté de mesurer le degré de crédibilité de la participation des monnaies européennes à ce régime (Svensson, 1991) et les risques de réalignement anticipés : méthode du « drift adjusment » (Bertola & Svensson, 1993), (Rose & Svensson 1994, 1995), (Rose, 1993). Un trait commun de ces études réside dans leur quasi incapacité à anticiper les crises de change.

En ce basant sur cette constatation, la recherche s'est axée sur l'extraction d'information délivrée par les produits dérivés, censée être plus riche et avoir un contenu davantage anticipatif, donc mieux à même de prédire les risques de tensions (Dumas Jennergren & Näslund, 1992-1993). Les taux de réalignement anticipés calculés par Malz (1996-a) à partir des prix d'options de change et appliqués à la crise de septembre 1992 diffèrent de ceux basés sur les écarts de taux d'intérêt. Les écarts de taux, reflétant l'anticipation de réaction des banques centrales, paraissent en fait s'ajuster avec lenteur et de manière incomplète aux pressions spéculatives. Campa et Chang (1996) ont proposé deux tests de crédibilité d'un régime de zone cible basés sur l'arbitrage dont l'objectif est aussi de mesurer le taux de réalignement anticipé. Leurs résultats présentent des caractéristiques similaires : leurs indicateurs, extraits des options de change, ont un certain pouvoir prédictif, notamment pour la crise de la lire italienne de septembre 1992 et celle du franc de juillet 1993. Dans ces deux cas, l'hypothèse de parfaite

crédibilité est rejetée dix mois avant la crise en ce qui concerne la lire et un peu moins d'un mois pour le franc.

Les prix des options de change sont ainsi des indicateurs utiles lorsqu'il s'agit d'évaluer le « sentiment du marché » et les risques d'émergence de crises de change. Les banques centrales en suivent deux plus spécifiquement depuis plusieurs années : la volatilité implicite « à-la-monnaie »<sup>2</sup>, écart-type anticipé du taux de change jusqu'à une échéance particulière, et les prix des « risk reversals »<sup>3</sup>, censés refléter le sentiment du marché quant à la direction future des cours. Mais ces indicateurs ne fournissent qu'une information partielle et, depuis l'élargissement des marges de fluctuation dans le mécanisme de change européen (MCE) à  $\pm 15\%$ , les méthodologies fondées sur l'estimation du taux de réaligement anticipé par le marché ne sont plus réellement pertinentes (sauf éventuellement lorsque le taux de change est proche de l'une de ses bornes).

Aussi, un nouvel indicateur suivi par les banques centrales, issu des marchés d'options, est-il apparu : la densité de probabilité risque neutre du taux de change futur anticipé.<sup>4</sup> L'information contenue dans cet indicateur est nettement plus vaste, en ce qu'il fournit un résumé des anticipations sur les niveaux possibles des cours de changes ainsi que les probabilités (risque neutre) respectives que les marchés leur affectent. Sa construction nécessite de formuler un certain nombre d'hypothèses plus ou moins fortes selon la méthodologie retenue.

Parmi les méthodologies existantes, seules sont analysées dans cet article celles qui ont retenu l'attention des banques centrales : l'approche par l'ajustement d'un « smile » théorique au « smile » observé (Malz, 1996-b), le modèle à saut (Malz, 1996-a), l'approche postulant que la densité empirique peut provenir d'un mélange de lois lognormales pondérées (Bahra, 1996), et enfin le modèle à volatilité stochastique (Heston, 1993), qui a fait l'objet d'une attention particulière de la part de la Banque de France. Les densités de probabilité du DEM/FRF, construites à partir de ces différents modèles, sont ensuite comparées pour deux dates et plusieurs échéances afin de déterminer si leurs caractéristiques diffèrent significativement selon la méthode retenue. Puis, le contenu informationnel de la densité de probabilité du taux de change futur est étudié par rapport à la densité implicite dans le modèle standard d'évaluation des options de change. Il est également révélé au travers de l'étude de la modification des anticipations dans le courant du mois de juin 1997, après la dissolution de l'Assemblée nationale le 21 avril 1997, ainsi que dans la perspective de l'union monétaire. Enfin, différents indicateurs sont extraits de la densité ; plus synthétiques, ils permettent une lecture aisée de l'évolution des anticipations dans le temps ; il s'agit des marges implicites anticipées pour les cours de change futurs (Neuhaus 1996, Campa Chang & Reider 1997), de la structure à terme de la dispersion des anticipations et de différents indicateurs d'asymétrie de la densité de probabilité.

2. Sur les marchés de gré à gré, les options de change sont cotées en volatilité implicite. La volatilité « à-la-monnaie » est celle correspondant à un prix d'exercice égal au taux de change à terme.

3. Le « risk reversal » est la combinaison de l'achat d'un call et de la vente d'un put « en dehors-de-la monnaie ». Il renseigne sur l'asymétrie de la densité de probabilité du taux de change futur que les opérateurs ont en tête lorsqu'ils déterminent les prix des options.

4. Dans cet article, la densité de probabilité est toujours considérée sous la mesure de probabilité risque neutre. En effet, dans l'élaboration de la densité, l'hypothèse de l'agent représentatif risque neutre est nécessaire. Pour simplifier l'écriture, on fera référence le plus souvent à la densité de probabilité.

# Les modèles théoriques

La première approche visant à recouvrer la densité de probabilité consiste à dériver une relation liant la fonction d'évaluation d'une option d'achat (call) à la densité de l'actif sous-jacent (sur la notion d'option, voir ENCADRÉ). Breeden et Lizenberger (1978) ont montré que la dérivée seconde de la formule d'évaluation d'un call par rapport au prix d'exercice était directement proportionnelle à la densité de probabilité.

Le rendement à maturité d'un call européen de prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $T$  est  $\max(S_T - K, 0)$ , où  $S_T$  représente le taux de change à la date  $T$ . Soit  $C(S_t, t, K, T)$  la valeur d'un call européen, on a alors :

$$\begin{aligned} C(S_t, t, K, T) &= e^{-r \cdot (T-t)} E^* \left[ \max(S_T - K, 0) \right] \\ &= e^{-r \cdot (T-t)} \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T, T, S_t, t) dS_T \end{aligned} \quad (1)$$

où  $r$  est le taux d'intérêt domestique sans risque,  $E^*$  l'espérance mathématique sous la mesure de probabilité risque neutre et  $f(S_T, T, S_t, t)$  la densité de probabilité risque neutre du taux de change futur  $S_T$ , conditionnelle au taux de change courant  $S_t$ . La densité de probabilité du taux de change futur, évaluée à  $K = S_t$ , peut donc être exprimée comme étant proportionnelle à la dérivée seconde de la fonction d'évaluation du call, le coefficient de proportionnalité étant la valeur présente d'une obligation zéro coupon qui paie une unité monétaire domestique à maturité, le taux d'actualisation étant le taux sans risque :

$$f(S_T, T, S_t, t) = e^{r(T-t)} \frac{\partial^2 C(S_t, t, S_T, T)}{\partial K^2} \quad (2)$$

La densité peut donc être déduite dès lors que l'on dispose d'une série de prix d'options en fonction de leur prix d'exercice, ces derniers devant impérativement être espacés de façon régulière<sup>5</sup>, ou que l'on dispose de la formule explicite d'évaluation des calls en fonction des prix d'exercice.

La densité du modèle standard d'évaluation d'option (Black & Scholes, 1973) appliquée aux options de change – densité GK – (Garman & Kohlahgen 1983) est basée sur l'hypothèse que le taux de change suit un mouvement brownien sous une mesure de probabilité risque neutre de la forme  $\frac{dS_t}{S_t} = (r - r^*) dt + \sigma dW_t^*$  :

5. Neuhaus (1996) montre que l'on peut alors construire un histogramme implicite risque neutre du sous-jacent futur (les taux d'intérêt du marché monétaire allemand dans son étude). L'inconvénient de cette démarche est qu'elle ne permet pas de modéliser les queues de distribution extrêmes en raison du manque de données cotées pour des valeurs limites du sous-jacent. De plus, elle nécessite que les prix des options soient disponibles pour des prix d'exercice équidistants, ce que les marchés de gré de gré pour les options de change ne fournissent pas.

où  $r^*$  est le taux d'intérêt étranger sans risque et  $w_t^*$  est un processus de Wiener sous cette mesure de probabilité. La densité GK est alors lognormale :

$$f_{GK}(K, T, S_t, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma K} e^{-0.5 \left[ \frac{\ln(S_t/K) + (r - r^* - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right]^2} \quad (3)$$

La formule d'évaluation d'un call européen est donnée par :

$$C(S_t, \tau, K, \sigma, r, r^*) = e^{-r^*\tau} S_t \Phi \left[ \frac{\ln(S_t/K) + (r - r^* + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right] - e^{-r\tau} K \Phi \left[ \frac{\ln(S_t/K) + (r - r^* - \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \right] \quad (4).$$

Ce modèle postule que la volatilité est constante pour tous les prix d'exercice sur un échéance donnée. Or, l'existence même d'un « smile »<sup>6</sup> de volatilité constaté pour de nombreux prix d'actifs, c'est-à-dire le fait que les options en dehors de la monnaie soient cotées avec des volatilités implicites supérieures aux options à la monnaie, contredit l'hypothèse sur laquelle se base le modèle de GK. La densité lognormale ne permet pas de prendre en compte les fluctuations de forte amplitude du taux de change et l'asymétrie dans la distribution très souvent constatée.

Trois approches, basées sur le « théorème de Breeden et Litzenberger » ont été développées dans la littérature afin d'estimer la densité empirique que les opérateurs ont implicitement en tête lorsqu'ils établissent les prix des options, cette densité étant différente de la loi lognormale.

La première approche est non paramétrique<sup>7</sup>. Elle postule une spécification fonctionnelle particulière pour le smile observé (ou pour la formule du call), c'est-à-dire consiste à interpoler une fonction minimisant l'écart entre les volatilités observées en fonction de leur prix d'exercice et les volatilités théoriques générées par la fonction (Shimko, 1993 ; Malz, 1996-b). L'avantage de cette technique d'ajustement pour recouvrer la densité est qu'elle ne postule pas de processus a priori sur le sous-jacent et ne fait pas d'hypothèse sur la forme possible de la densité. Néanmoins, la technique d'interpolation peut éventuellement être considérée comme arbitraire.

La deuxième approche propose des « candidats » possibles à la densité de probabilité a priori par exemple un mixte de deux lois lognormales (Bahra, 1996 ; Melick & Thomas, 1994, pour les options américaines ; Svensson & Söderlind, 1997).<sup>8</sup> Cette approche pourrait être qualifiée de « semi-paramétrique » en ce qu'elle n'impose pas de restriction paramétrique sur la dynamique du prix du sous-jacent mais nécessite l'estimation de paramètres pour recouvrer la densité de probabilité empirique.

La troisième approche est paramétrique et consiste à postuler une dynamique sur le sous-jacent, par exemple un processus de Poisson sur le taux de change

6. On parle de « smirk » lorsque le « smile » est fortement croissant ou décroissant avec un effet sourire très faible voire inexistant.

7. Parmi les approches non paramétriques, voir Aït Sahalia & Lo (1995) et Hutchinson, Lo & Poggio (1994).

8. Voir aussi Rubinstein (1994) ; Jackwerth & Rubinstein (1995) ; Jarrow & Rudd (1982).

(Malz, 1995 ; Bates, 1991) ou faire l'hypothèse que le taux de change suit un mouvement brownien corrélé avec une volatilité stochastique (Heston, 1993)<sup>9</sup>, voire les deux à la fois : processus de Poisson et volatilité stochastique (Bates, 1996). Ces processus postulés sur le sous-jacent permettent de déduire une formule d'évaluation des calls européens qui, le plus souvent, n'a pas de solution analytique.

## ENCADRÉ

## Quelques éléments de terminologie spécifique aux options

Les options considérées dans cet article sont des options de change européennes, elles ne peuvent donc être exercées qu'à l'échéance de l'option. Ce sont des options d'achat et de vente sur le mark, appelées couramment calls et puts. L'acheteur de calls sur le mark a le droit mais non l'obligation d'acheter des marks à l'échéance à un prix spécifié à l'avance, le prix d'exercice. L'acheteur d'un put a le droit et non l'obligation de vendre du mark à un prix d'exercice donné. Relativement aux contrats à terme fermes, les options offrent donc l'avantage de la conditionalité : en cas d'évolution défavorable du taux de change, le détenteur d'une option peut ne pas exercer son droit. Ces options sont utilisées à des fins de couverture du risque de change par les gestionnaires de portefeuille et les institutions non financières ; mais elles sont également appréciées des spéculateurs, en raison du fort effet de levier qu'elles autorisent ; le profit possible d'un acheteur de call est a priori illimité tandis que sa perte est limitée à la prime de l'option.

Sur le marché de gré à gré, le prix d'une option est exprimé en volatilité implicite, son prix étant fonction du niveau de volatilité anticipé jusqu'à la maturité, ce qui traduit l'importance accordée à ce facteur par les opérateurs. La prime est alors déterminée par la formule standard d'évaluation de Black et Scholes (*op. cit.*), appliquée aux options de change (Garman & Kohlhagen, *op. cit.*). On peut donc exprimer indifféremment le prix d'une option en terme de volatilité implicite ou de prime.

La volatilité implicite diffère selon le prix d'exercice, donc selon la valeur anticipée du sous-jacent à l'échéance. On parle de volatilité à la monnaie dans le cas où le prix d'exercice est égal au taux de change à terme, de volatilité en dehors de la monnaie, lorsque le prix d'exercice du call (du put) est supérieur (inférieur) au taux à terme. Pour un call, plus le prix d'exercice est élevé, plus la probabilité que le taux de change courant à l'échéance soit supérieur est faible. La volatilité dans la monnaie est celle correspondant à un prix d'exercice soit du call (du put) inférieur (supérieur) au taux de change à terme.

Sur le marché de gré à gré, les options sont exprimées en fonction des deltas, plutôt que par rapport aux prix d'exercice. Le delta d'une option est une mesure de la sensibilité du prix de l'option à une faible variation du taux de change courant. Il est compris entre 0 et 1 pour les calls et 0 et -1 pour les puts. Les options en dehors de la monnaie ont des deltas compris entre 0 et 0,5 pour un call et -0,5 et 0 pour un put. Plus l'option est en dehors de la monnaie, plus le delta est proche de 0. L'option à la monnaie a un delta de 0,5.

La dispersion des anticipations sur la valeur future du taux de change est souvent représentée par un smile de volatilité implicite : les calls et les puts en dehors de la monnaie pour une même devise et une même échéance sont cotées avec des volatilités implicites supérieures à la volatilité à la monnaie. En effet, la variation du taux de change jusqu'à l'échéance de l'option, nécessaire

9. Voir Hull & White (1987) ; Chesnay & Scott (1989) ; Melino Turnbull (1990) ; Ball & Roma (1994). Ces auteurs ont proposé différents modèles d'évaluation à volatilité stochastique ; pour obtenir une solution quasi analytique, ils ont dû postuler une corrélation nulle entre le taux de change et sa volatilité.

pour que les options en dehors de la monnaie terminent dans la monnaie, implique une volatilité anticipée plus importante.

C'est à partir du smile de volatilité que peut être extraite la densité de probabilité du taux de change futur. En effet, deux volatilités implicites adjacentes sur un smile permettent d'établir la probabilité que le taux de change à l'expiration de l'option se situe dans l'intervalle des deux prix d'exercice correspondant aux deux options. Mais l'étendue des prix d'exercice ou des deltas ne couvre généralement pas l'ensemble des valeurs possibles du taux de change à l'échéance, notamment pour les valeurs extrêmes, faibles ou fortes. Aussi, est-il nécessaire de formuler un certain nombre d'hypothèses pour dériver entièrement la densité de probabilité risque neutre du taux de change anticipé pour une maturité donnée.

## Forme fonctionnelle sur le smile de volatilité et densité de probabilité

Cette méthodologie ne nécessite pas l'estimation de paramètres pour recouvrer la densité de probabilité, elle consiste à ajuster une fonction de « smile » théorique sur les « smiles » observés. Sous la spécification de Malz (1996-b), le smile de volatilité théorique dépend de trois composantes : la volatilité « à-la-monnaie »  $atm_t$ , le prix du « risk reversal »  $r r_t$ , et le prix des « strangles »  $str_t$ .

$$\sigma(\delta, atm_t, r r_t, str_t) = b_0 atm_t + b_1 r r_t (\delta - 0,5) + b_2 str_t (\delta - 0,5)^2 \quad (5)$$

Selon la parité Put-Call, le prix du « risk reversal » peut être exprimé comme la différence entre le prix d'un call (exprimé en volatilité) de delta 0,25 et le prix d'un call de delta 0,75 :  $\sigma^{0,25} - \sigma^{0,75}$ . Il fournit une indication sur le biais directionnel des cours anticipés par le marché ou, plus précisément, sur l'asymétrie de la densité de probabilité du taux de change futur : un « risk reversal » positif (négatif) traduit l'existence d'une queue de distribution épaisse à droite (à gauche). Le prix du « strangle » indique le degré de courbure du « smile » empirique ; il fournit donc une idée du kurtosis de la distribution de probabilité, c'est-à-dire de l'épaisseur des queues de distribution. Il est calculé comme la moyenne de la volatilité d'un call de delta 0,25 et 0,75, à laquelle est soustraite la volatilité « à-la-monnaie » :  $str = 0,5(\sigma^{0,75} + \sigma^{0,25}) - atm$ .

La forme fonctionnelle de (5) exacte n'aurait, selon Malz, qu'une influence modérée sur la densité de probabilité, dès lors que les prix des options citées se situent sur la fonction postulée. Ceci implique donc que  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 2$  et  $b_2 = 16$ .

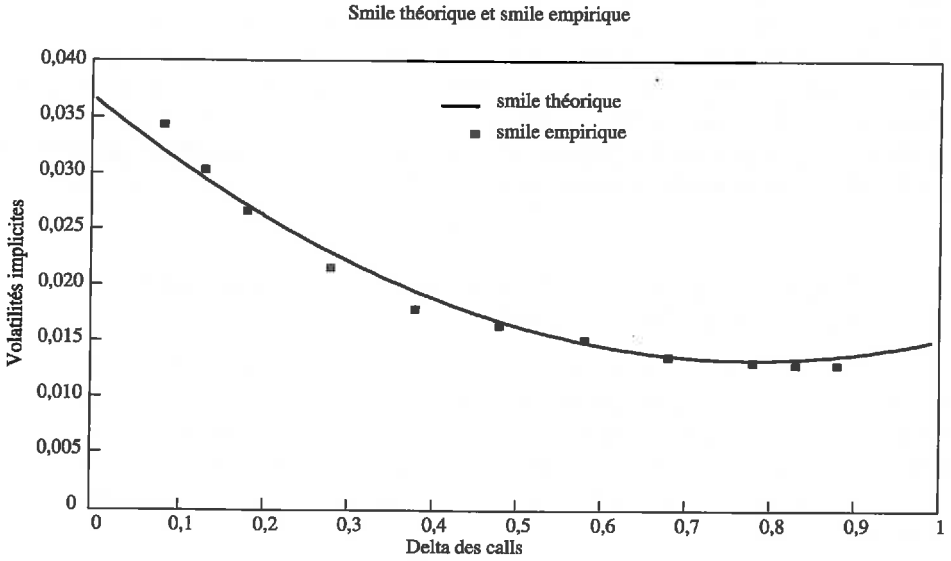
Afin d'illustrer l'équation (5), considérons les prix des options sur le FRF/DEM le 27 juin 1997 de maturité un mois :

$atm = 1,6 \%$ ,  $r r_{0,25} = 1,075 \%$  et  $str = 0,2375 \%$ .

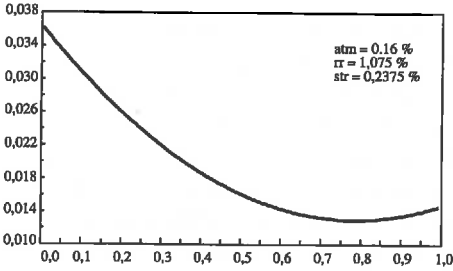
Le GRAPHIQUE 1 montre que l'écart entre les smiles empirique et théorique issu de l'équation (5) est faible ; différentes configurations de smiles sont présentées selon que le prix du « risk reversal » est nul, positif ou négatif et que celui du « strangle » est nul ou positif. Ce graphique témoigne du caractère très flexible de l'équation (5) pour générer différentes formes possibles de smiles.

GRAPHIQUE 1

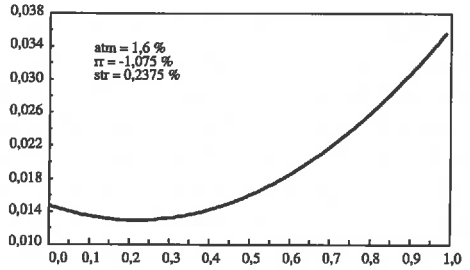
Smiles empirique et théorique pour le 27 juin 1997



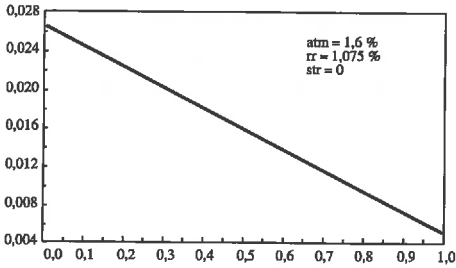
smile de volatilité



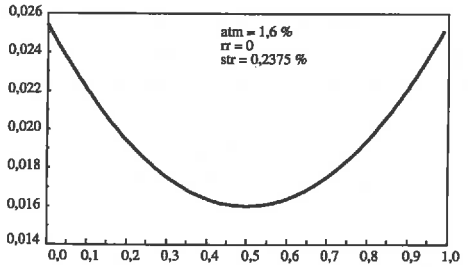
smile de volatilité



smile de volatilité



smile de volatilité





On remplace la valeur du delta <sup>10</sup> par sa formule dans l'équation (5) afin d'obtenir la fonction du smile en fonction des prix d'exercice ; cette fonction n'a pas de solution analytique :

$$\sigma(K) = atm_1 + 2rr_1 \left\{ e^{-r^* \tau} \Phi \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - r^* + \sigma^2 / 2) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right] - 0,5 \right\} + 16str_1 \left\{ e^{-r^* \tau} \Phi \left[ \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + (r - r^* + \sigma^2 / 2) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right] - 0,5 \right\}^2 \quad (6)$$

En substituant cette équation dans la formule de Garman et Kohlhagen, utilisée ici comme simple formule de translation, on obtient la formule d'évaluation d'un call européen qui prend en compte l'existence du smile de volatilité, puisque pour chaque prix d'exercice va correspondre une volatilité différente :

$$C(S_t, \tau, K, atm_1, rr_1, str_1, r, r^*) = e^{-r^* \tau} S_t \Phi \left[ \frac{\ln(S_t / K) + (r - r^* + \sigma^2(K) / 2) \tau}{\sigma(K) \sqrt{\tau}} \right] - e^{-r^* \tau} K \Phi \left[ \frac{\ln(S_t / K) + (r - r^* - \sigma^2(K) / 2) \tau}{\sigma(K) \sqrt{\tau}} \right] \quad (7)$$

La dérivée seconde de cette fonction calculée numériquement et multipliée par  $e^{r^* \tau}$  détermine la densité de probabilité risque neutre du taux de change futur.

### L'approche par le mixte de deux lois lognormales

Si l'on reprend l'équation (1), n'importe quelle forme fonctionnelle peut être spécifiée a priori comme candidat à la densité de probabilité :  $f(S_T, T, S_t, t)$ . Un mixte de trois lois lognormales pourrait être postulé (Melick & Thomas, 1994). L'équation (8) est la formule d'évaluation d'un call sous l'hypothèse que la densité du taux de change futur résulte d'un mélange de deux lois lognormales pondérées (Bahra, 1996).

$$C(K, t, \tau) = e^{-r\tau} \int_K^{\infty} \left\{ \theta \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau} K \beta_1} e^{-0,5 \left[ \frac{\ln K - \alpha_1}{\beta_1} \right]^2} \right] + (1 - \theta) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau} K \beta_2} e^{-0,5 \left[ \frac{\ln K - \alpha_2}{\beta_2} \right]^2} \right] \right\} (S_T - K) dS_T \quad (8)$$

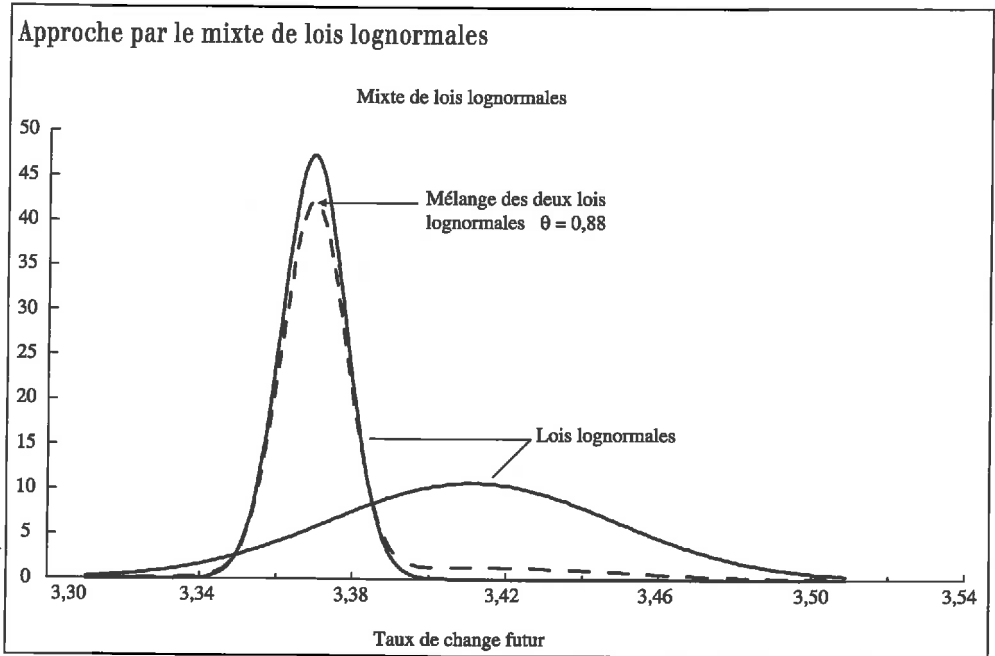
où  $\theta$ , facteur de pondération des deux densités est compris entre 0 et 1,  $\tau$  est la durée de vie de l'option égale à  $(T-t)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1)$ , respectivement  $(\alpha_2, \beta_2)$ , sont les paramètres de la première (seconde) densité, à savoir la moyenne et l'écart-type annualisé. La contrainte suivante a été imposée afin que l'espérance soit égale au taux de change à terme :

$$S_t e^{(r-r^*)\tau} = \theta e^{\alpha_1 + 0,5\beta_1^2 \cdot \tau} + (1-\theta) e^{\alpha_2 + 0,5\beta_2^2 \cdot \tau}$$

10. Le delta d'une option est la dérivée première du prix du call par rapport au taux de change courant, il traduit donc la sensibilité du prix de l'option à une variation du sous-jacent. Il est égal à :

$$:\delta = e^{-r^* \tau} \Phi \left[ \frac{\ln(S_t / K) + (r - r^* + \sigma^2 / 2) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \right]$$

## GRAPHIQUE 2



Le GRAPHIQUE 2 représente la densité empirique du taux de change DEM/FRF à un mois le 27 juin 1997, résultant du mélange de deux lois lognormales.

### Modèle à saut

La constatation empirique d'une asymétrie et d'un excès de kurtosis des rendements du taux de change <sup>11</sup> a conduit Malz (1996-a), à la suite de Merton (1976), Jorion (1988), Bates (1991-1996), à postuler un processus brownien avec saut sur le taux de change. La dynamique du taux de change sous une mesure de probabilité risque neutre est alors augmentée d'une processus de Poisson :

$$S_T = S_0 + \int_0^T (r - r^* - \lambda E[k]) S_t dt + \int_0^T \sigma_w S_t dW_t^* + \int_0^T S_t k_i dq_{i,T} \quad (9)$$

où  $\sigma_w$  est la volatilité de la diffusion du taux de change,  $q_{i,T}$  est un compteur de Poisson sur l'intervalle  $(t, T)$  avec une probabilité de saut de  $\lambda \tau$ ,  $k$  la taille du saut possible et  $W_t^*$  est un processus de Wiener. Afin de simplifier la formule,  $k$  est postulé non stochastique et on fait l'hypothèse qu'il y a soit un saut jusqu'à l'échéance, soit aucun. La formule d'évaluation d'un call sous sa version distribution Bernouilli est alors (Ball & Torous, 1985) :

11. Voir Boothe & Glassman (1987) ; Hsieh (1988).

$$C(S_t, t, T; K, \sigma_w, r, r^*, \lambda, k) = (1 - \lambda\tau) \left[ \frac{S_t e^{-r^* \tau}}{1 + \lambda k \tau} \cdot \Phi(d_0 + \sigma_w \sqrt{\tau}) - K e^{-r \tau} \Phi(d_0) \right] \\ + \lambda\tau \left[ \frac{S_t e^{-r^* \tau}}{1 + \lambda k \tau} \cdot (1+k) \cdot \Phi(d_1 + \sigma_x \sqrt{\tau}) - K e^{-r \tau} \Phi(d_1) \right] \quad (10)$$

$$d_0 = \frac{\ln(S_t / K) - \ln(1 + \lambda k \tau) + (r - r^* - \sigma_w^2 / 2) \tau}{\sigma_w \sqrt{\tau}}$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln(S_t / K) - \ln(1 + \lambda k \tau) + \ln(1+k) + (r - r^* - \sigma_w^2 / 2) \tau}{\sigma_w \sqrt{\tau}}$$

Cette formule se compose de la moyenne de la valeur de l'option de type GK, pondérée par la probabilité d'un saut :  $\lambda\tau$ , si un saut doit avoir lieu avant la maturité de l'option et la valeur de l'option pondérée par la probabilité d'absence de saut, si aucun saut n'intervient avant l'échéance. Elle postule de plus que les paramètres risque neutre à estimer ( $k$ ,  $\lambda$  et  $\sigma_w$ ) sont constants jusqu'à la maturité de l'option.

## Modèle à volatilité stochastique

Les modèles à volatilité stochastique généralisent le mouvement brownien géométrique en permettant à la volatilité des rendements d'évoluer de manière stochastique dans le temps. Ils constituent une autre voie, parallèlement aux diffusions à saut, capable de prendre en compte l'asymétrie et l'excès de kurtosis des rendements du taux de change. Le processus de volatilité postulé par Heston (1993) est un processus de racine carrée avec retour à la moyenne.<sup>12</sup>

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{v(t)} \cdot dW_1 \quad (11)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v(t))dt + \sigma \sqrt{v(t)} dW_2$$

où  $v(t)$  est la variance instantanée des rendements du taux de change,  $\theta$  est la variance de long terme,  $\kappa$  est le paramètre de retour vers la variance de long terme,  $\sigma$  est la volatilité de la volatilité de la diffusion et  $\rho$  est le coefficient de corrélation entre les deux mouvements browniens standards  $W_1$  et  $W_2$  :  $dW_1 dW_2 = \rho dt$ . Le niveau de la volatilité peut ainsi être relié à celui de l'actif sous-jacent. Le prix d'une option peut s'écrire sous la forme suivante :

$$C(S_t, K, \tau, r, r^*) = e^{-r^* \tau} S_t P_1 - e^{-r \tau} K P_2 \quad (12)$$

12. Cette spécification garantit que la variance reste strictement positive, voir Bates (1996).

où,

$$P_j(\ln S, v, T; \ln K_c) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\Phi \ln K_c} f_j(\ln S, v, T; \Phi)}{i\Phi} \right] d\Phi \quad (13)$$

$$f_j(\ln S, v, t; \Phi) = e^{C(\tau; \Phi) + D(\tau; \Phi)v + \tau \Phi \ln S} \quad (14)$$

L'équation (14) est la solution de la fonction caractéristique déterminée à partir des équations ci-dessous :

$$C_j(\tau; \Phi) = (r - r^*) \Phi i \tau + \frac{k\theta}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho \sigma \Phi i + d_j) \tau - 2 \ln \left[ \frac{1 - g e^{d_j \tau}}{1 - g} \right] \right\}$$

$$D_j(\tau, \Phi) = \frac{b_j - \rho \sigma \Phi i + d_j}{\sigma^2} \left[ \frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - g} \right]$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho \sigma \Phi i + d_j}{b_j - \rho \sigma \Phi i - d_j}$$

$$d_j = \sqrt{\left[ (\rho \sigma \Phi i - b_j)^2 - \sigma^2 (2u_j \Phi i - \Phi^2) \right]}$$

$$u_1 = 1/2 \quad u_2 = -1/2 \quad b_1 = k + \lambda - \rho \sigma \quad b_2 = k + \lambda$$

Sous une mesure de probabilité risque neutre, on peut reformuler les processus suivis par le taux de change et sa variance :

$$d(\ln S) = (r - r^* + u, v) dt + \sqrt{v(t)} dW_1^* \quad (15)$$

$$dv(t) = K^* (\theta^* - v(t)) dt + \sigma \sqrt{v(t)} dW_2^*$$

où

$$k^* = k + \lambda \text{ et}$$

$$\theta^* = \frac{\theta \kappa}{\kappa + \lambda} .$$

Cinq paramètres sont à estimer, la prime de risque de volatilité  $\lambda$  n'étant pas identifiable :  $k^*$ ,  $\theta^*$ ,  $\rho$ ,  $\sigma$  et  $v$ , la variance non observable qui peut être estimée avec les autres paramètres.

## Comment départager les différents modèles

Les données portant sur les volatilités implicites en fonction de leur delta respectif sont fournies à la Banque de France selon une fréquence mensuelle. Les options sont européennes donc exerçables uniquement à maturité. Elles sont disponibles pour les échéances de un, deux, trois, six, neuf et douze mois, avec 11 deltas différents par maturité (parfois avec 13 deltas ; néanmoins, seulement 11 points constituant le « smile » ont été utilisés pour les estimations, dans le but d'homogénéiser la série). Elles sont issues du marché de gré à gré, plus liquide pour les monnaies européennes<sup>13</sup> que ne le sont les marchés organisés de type MATIF. Les données sont des cours d'achat et de vente exprimés en volatilités implicites annualisées ; les estimations ont été réalisées à partir de la moyenne de ces cours. Les séries de données couvrent la période de mai 1996 à juin 1997. Le taux de change DEM/FRF considéré pour chaque date est celui coté au moment où les volatilités ont été saisies. Les taux d'intérêt sont des taux euro fournis par la Banque de France.<sup>14</sup>

Concernant les procédures d'estimation, pour les modèles nécessitant l'estimation de paramètres, comme le modèle à saut, le modèle du mixte de lois lognormales ou le modèle d'évaluation à volatilité stochastique, la somme des carrés des erreurs entre les prix de marché et les prix théoriques a été minimisée afin d'obtenir les paramètres nécessaires.<sup>15</sup> Les moindres carrés non linéaires ont été utilisés ainsi que certaines procédures d'optimisation disponibles sous le logiciel GAUSS de type BFGS et DPF. Pour le mélange de lois lognormales, une contrainte a été imposée pour l'optimisation selon laquelle l'espérance mathématique de la densité issue des paramètres estimés doit être égale au taux de change à terme. Pour le modèle à volatilité stochastique, la procédure d'intégration utilisée est numérique : Gauss Legendre (Abramowitz, Stegun, 1964, pp. 919). Les résultats de ces estimations sont présentés dans les TABLEAUX 1, 2, 3 et 4 en ANNEXE.

La comparaison des différents modèles doit s'opérer en fonction d'un certain nombre de critères pour juger de leurs performances respectives. On distinguera cinq critères ; le premier tient dans l'information délivrée par les paramètres estimés, le second est la somme des écarts au carré entre les prix théoriques et les prix observés (l'accent est mis sur la capacité du modèle à s'ajuster aux prix des options de change cotés), le troisième critère insiste sur les différents moments empiriques des distributions de probabilité générées par les modèles, le quatrième concerne les intervalles de confiance, enfin le cinquième critère prend en compte la forme des courbes de densité.

13. Le marché des options sur les monnaies européennes est liquide jusqu'à l'échéance d'un an. Au-delà, les transactions effectuées deviennent rares, du fait de l'approche de l'union monétaire.

14. On peut s'attendre à un biais de synchronisation, puisque les taux d'intérêt retenus dans les estimations ne sont pas nécessairement ceux qui prévalaient au moment où les volatilités ont été observées.

15. L'estimation pourrait aussi être menée sur la base de la minimisation entre les volatilités observées et les volatilités théoriques générées par les modèles (Poncet & Gesser, 1996).

## Le contenu informationnel

Le premier critère privilégie la lisibilité et le contenu informationnel des paramètres estimés. Les modèles paramétriques postulant une dynamique sur le taux de change sont naturellement plus riches en information que les autres méthodologies.

Les paramètres estimés du modèle à saut figurent en annexe. Le TABLEAU 1 s'interprète comme suit : le 2 juin 1997, sur une échéance d'un mois, le marché anticipe avec une probabilité de 8,55 % un saut d'amplitude 2,55 % conduisant à une dépréciation anticipée du FRF de 0,22 %. On constate que l'amplitude de saut ( $k$ ) augmente avec l'échéance, tandis que la probabilité d'un saut intervenant avant la maturité de l'option ( $\lambda \cdot \tau$ ) diminue. Le résultat est une anticipation de dépréciation du FRF ( $\lambda \cdot \tau \cdot k$ ,  $k$  étant positif) croissante lorsque le terme considéré augmente. Cependant, la volatilité  $s$  de la diffusion à saut baisse avec l'échéance, ce qui compense l'anticipation de dépréciation, puisque la volatilité non conditionnelle annualisée  $\sqrt{\sigma^2 + k^2 \lambda}$  décroît avec la maturité. L'incertitude générale semble donc être plus prégnante dans le court que dans le plus long terme.

Le 27 juin 1997, la volatilité non conditionnelle est plus faible que celle du 2 juin ; elle croît plus faiblement quand la maturité s'élève. Le paramètre  $\sigma$  sur la diffusion reste constant par rapport à l'échéance ; aussi le faible accroissement de la volatilité non conditionnelle provient-elle de l'augmentation de la dépréciation du change anticipée, du fait de l'amplitude du saut anticipé croissante avec le terme.

Les paramètres estimés du modèle à volatilité stochastique sont reportés en annexe (TABLEAU 2). Le 2 juin 1997, la volatilité de long terme  $\sqrt{\theta^*}$  élevée à court terme décroît avec le terme. Cette information était contenue dans la volatilité non conditionnelle de la diffusion à saut. Le même phénomène est observé pour le coefficient de corrélation  $\rho$  entre le taux de change et sa volatilité : l'asymétrie anticipée de la densité se réduit à mesure que l'échéance de l'option s'éloigne. Le paramètre  $\sigma$ , volatilité de la volatilité, connaît une évolution identique. La valeur décroissante avec le terme de ces paramètres traduit l'existence de tensions à courte échéance, qui se réduiraient sur un horizon temporel plus lointain. Ainsi, si des événements impliquant de fortes fluctuations du taux de change devaient intervenir, ils se produiraient davantage à court terme qu'à plus long terme. Cette information est en parfait accord avec l'observation d'une structure à terme de la volatilité inversée le 2 juin.

Pour le 27 juin 1997, la volatilité de long terme est nettement plus faible que le 2 juin. En outre, l'écart entre cette volatilité de long terme et la volatilité instantanée est faible, traduisant le fait qu'aucun événement extrême n'est anticipé jusqu'aux différentes maturités considérées. Que la volatilité instantanée  $\sqrt{v_t}$  augmente faiblement avec le terme traduit seulement l'existence d'une incertitude plus importante lorsque l'horizon temporel s'accroît.

Pour le mixte de lois lognormales, les résultats des estimations sont présentés en annexe. Pour le 2 juin 1997, l'incertitude générale se réduit avec la maturité, ce que révèlent les valeurs décroissantes de  $\beta_1$ , écart-type de la première den-

sité. Par comparaison avec les deux modèles précédents, l'information fournie par  $\beta_1$  est sensiblement comparable à la volatilité non conditionnelle de la diffusion à saut ou la volatilité de long terme  $\sqrt{\theta^*}$  dans le modèle à volatilité stochastique. Néanmoins, on remarque que l'écart entre les moyennes de deux densités lognormales  $\alpha_2 - \alpha_1$  croît avec la maturité considérée ; il passe de 0,01352 pour le un mois à 0,0833 sur le un an. L'amplitude de la dépréciation du FRF anticipée ( $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ ) s'élève avec le terme. Les événements rares impliquant une forte variation du change sont donc considérés comme plus probables à mesure que l'échéance s'éloigne. Ce résultat est à mettre en parallèle avec le niveau du taux de dépréciation anticipé issu du modèle à saut, qui croît avec la maturité. Pour expliquer l'effet final, à savoir la réduction de l'incertitude générale lorsque le terme s'accroît, bien que des événements rares soient considérés comme plus probables à plus long terme, il faut faire référence au paramètre de pondération  $\theta$  des deux lois lognormales. Celui-ci augmente avec la maturité, donnant plus de poids à la première densité, donc minimisant l'incertitude supplémentaire due au paramètre  $\beta_2$ .

Le paramètre de pondération entre les deux lois reste stable pour les différentes échéances le 27 juin 1997. Le niveau de l'incertitude a baissé par rapport au 2 juin, les valeurs de  $\beta_1$  stables en fonction des échéances, étant nettement plus faibles. L'écart croissant entre les deux espérances mathématiques s'est réduit le 27 juin relativement au 2 juin, traduisant un apaisement des tensions et un infléchissement des anticipations à la dépréciation du FRF croissantes avec la maturité.

Quant à la méthode d'ajustement du « smile » théorique au « smile » empirique, elle ne nous renseigne pas sur la dynamique du taux de change.

## La somme des carrés des écarts

Le second critère est la somme des carrés des écarts (SCE) entre les prix théoriques et les prix observés pour une échéance donnée ; il teste la capacité des modèles à évaluer correctement le prix des options sur l'échantillon considéré. Le modèle lognormal s'avère le moins apte à s'ajuster aux prix observés (annexe, TABLEAU 4). Sur les deux dates, les performances du modèle postulant un mixte de lois lognormales sont supérieures à celles du modèle à saut et du modèle à volatilité stochastique, la SCE étant la plus faible sur la majorité des maturités. Les moins bons résultats du modèle à volatilité stochastique peuvent être imputés à la présence de perturbations sinusoidales sur la densité de probabilité, qui conduisent à des probabilités négatives à l'extrémité des queues de distribution. Il a été imposé la nullité des points extrêmes de la distribution, dès lors qu'une probabilité négative était rencontrée ; la partie de l'aire manquante a alors été réaffectée à l'ensemble de la densité. L'approche non paramétrique postulant une forme fonctionnelle sur le « smile » de volatilité ne repose pas sur l'estimation de paramètres ; aussi ce critère ne permet-il pas de la comparer avec les autres modèles.

## Moments de la distribution

Le troisième critère concerne les propriétés statistiques de la densité de probabilité (annexe, TABLEAU 5). Les moments empiriques des densités de probabilité issues des différents modèles sont comparés. En premier lieu, on vérifie que

l'espérance mathématique issue d'un modèle particulier est bien égale au taux de change à terme, moment du premier ordre risque neutre. Les modèles considérés respectent assez bien ce critère. Par définition le modèle lognormal et la diffusion à saut imposent cette condition. Cette contrainte a aussi été imposée dans l'estimation du modèle de mixte de lois lognormales. Le modèle à volatilité stochastique produit parfois une espérance mathématique très légèrement différente du taux de change à terme. Concernant les écart-types, la volatilité qui résulte du modèle de Garman et Kohlhagen est toujours plus faible que les volatilités provenant des autres modèles, les niveaux de ces dernières étant sensiblement comparables, exception faite du modèle à volatilité stochastique, dont les écart-types sont de taille plus réduite.

Le critère concernant les moments ne peut donc porter que sur les moments du troisième et du quatrième ordre. Les coefficients d'asymétrie et de kurtosis<sup>16</sup> augmentent avec le terme pour tous les modèles considérés. Pour les deux dates et pour les quatre maturités considérées, le mélange de lois lognormales produit des niveaux de skewness et de kurtosis empiriques nettement plus élevés que les autres modèles. La raison est qu'il ne permet pas de prendre en compte d'éventuelles bimodalités<sup>17</sup>; l'écart-type de la seconde loi lognormale est alors élevé et conduit à une décroissance faible de la courbe de densité à droite dans le cas du DEM/FRF. Inversement, le modèle à volatilité stochastique conduit systématiquement aux valeurs les plus faibles, valeurs restant cependant assez proches de celles issues de la diffusion à saut et de l'approche du « smile » théorique.

En conclusion, l'approche par le mélange des deux lognormales produit des niveaux de moments du troisième et du quatrième ordre anormalement élevés par rapport aux autres méthodologies. Les valeurs intermédiaires issues de la diffusion à saut et de l'approche par le « smile » théorique apparaissent donc préférables.

## Les intervalles de confiance

Le quatrième critère concerne les intervalles de confiance. Pour les deux dates, deux intervalles de confiance de 90 % et 99 % ont été calculés. Ils permettent d'identifier avec une probabilité de  $x$  % l'intervalle à l'intérieur duquel le taux de change futur est anticipé par le marché à l'échéance de l'option. Le TABLEAU 6 présente pour les échéances de un, trois, six et douze mois les bornes inférieures et supérieures des intervalles de confiance ainsi que le rapport du taux de change à terme à la borne inférieure et le rapport de la borne supérieure au taux de change à terme (annexe).<sup>18</sup> Ces bornes ont été exprimées en fonction du taux de change à terme, les densités de probabilité d'où sont issus les intervalles

16. Le « skewness » est une mesure de l'asymétrie de la densité de probabilité, calculé à partir de la somme des écarts au cube entre les différentes valeurs du taux de change anticipé et la moyenne, normalisée par l'écart-type au cube de la distribution. Le kurtosis mesure la probabilité accordée aux variations extrêmes du taux de change anticipé; un kurtosis élevé traduit l'existence de queues de distribution épaisses relativement à celles de la loi lognormale.

17. Seul un mélange de trois lois lognormales serait à même de générer des bimodalités.

18. Plus exactement, les rapports de cette sous section sont égaux à :

(taux de change à terme/borne inférieure -1)\*100

(borne supérieure/taux de change à terme-1)\*100

(taux de change à terme/médiane -1)\*100.



de confiance étant calculées sous une mesure de probabilité risque neutre. L'interprétation doit donc s'effectuer en terme relatif et non en niveau.

Une caractéristique prévaut pour tous les modèles : le rapport du taux de change à terme à la borne inférieure est toujours inférieur au rapport de la borne supérieure au taux de change à terme, mis à part pour le modèle de GK, dont le caractère asymétrique n'est pas significatif, ce qui se traduit par des niveaux comparables pour les deux rapports. Pour les autres modèles, le taux de change à terme se situe donc plus près de la borne inférieure que de la borne supérieure, cette propriété traduisant la présence d'un coefficient d'asymétrie positif. L'écart entre les deux rapports augmente avec l'échéance et avec la largeur de l'intervalle de confiance. Les rapports du taux de change à terme à la borne inférieure ne font apparaître aucune différence systématique entre les modèles : les valeurs sont comparables pour les deux intervalles de confiance. En ce qui concerne le rapport de la borne supérieure au taux de change à terme, pour la marge de 90 %, la diffusion à saut conduit à des niveaux systématiquement supérieurs aux autres ; ce résultat ne se vérifie pas pour la marge de 99 % : la probabilité résiduelle au delà de l'intervalle de confiance est faible dans tous les modèles.

La largeur de l'intervalle de confiance, calculée comme la moitié de la différence entre la borne supérieure de l'intervalle et la borne inférieure exprimée en pourcentage du taux de change à terme figure aussi dans le TABLEAU (Camp, Chang & Reider, 1997). L'utilisation de cet indicateur de crédibilité de la politique monétaire est analysée plus en détail *infra*. Les intervalles pour le modèle lognormal sont toujours plus petits que dans les autres cas, ce qui traduit la présence d'un excès de kurtosis empirique. Pour l'intervalle de confiance de 90 %, la largeur de la bande est la plus élevée avec la diffusion à saut ; pour celui de 99 %, l'approche par le « smile » théorique conduit à des niveaux plus importants.

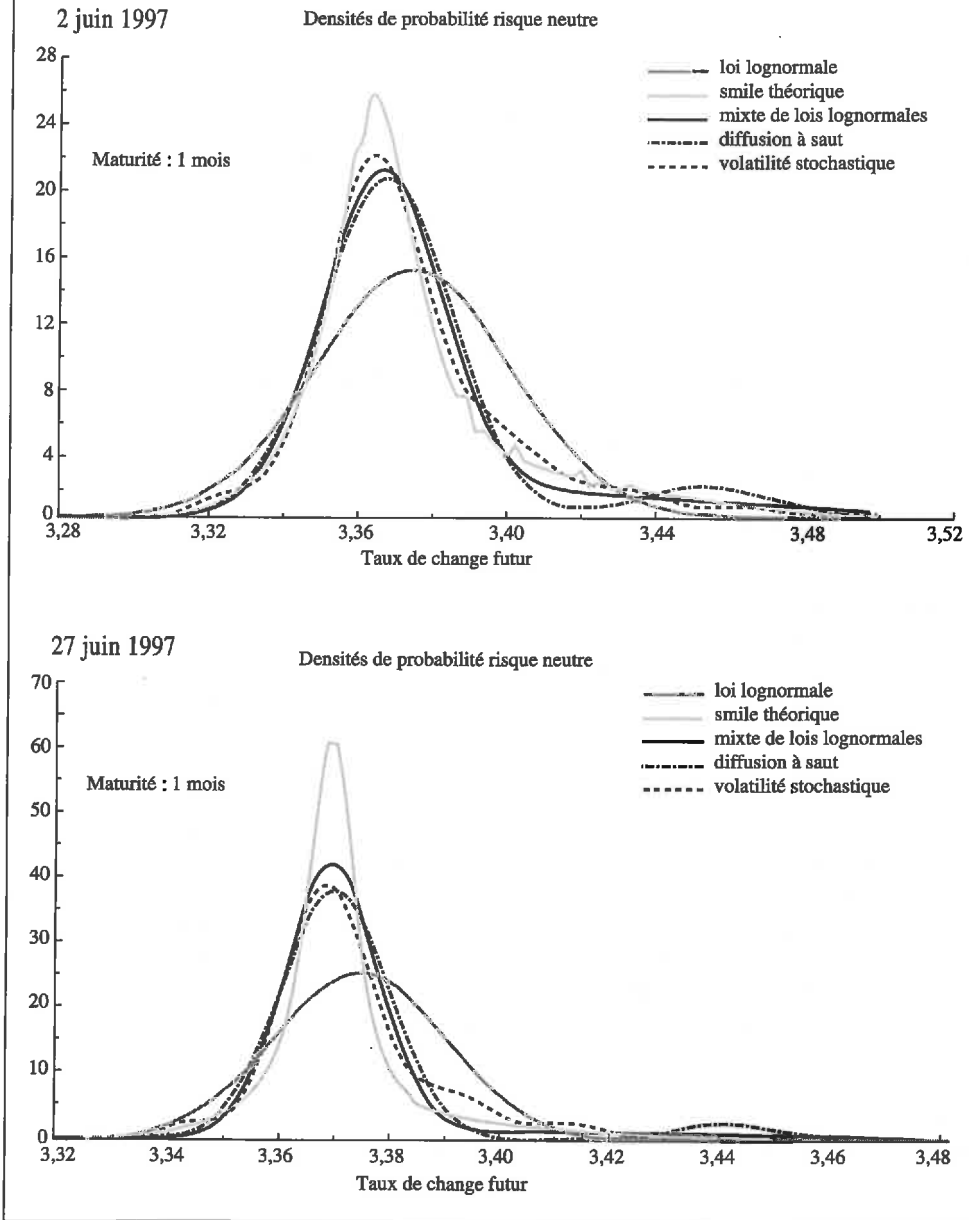
## Forme des densités

Au regard des précédents critères, l'approche par l'ajustement du « smile » théorique aux « smiles » empiriques conduit à des résultats intermédiaires ; elle n'apparaît pas comme marginale relativement aux autres. Néanmoins, graphiquement elle produit systématiquement des densités plus « pointues » que les autres modèles (GRAPHIQUE 3). Vu l'homogénéité des autres courbes, cette méthodologie semble donc ne pas fournir des résultats satisfaisants. Or, la raison de cette différence graphique réside en ce que la méthodologie utilisée pour déterminer la densité ne fait appel qu'aux options de deltas 0,25 et 0,5 ; les phénomènes extrêmes anticipés par les marchés ne sont donc pas intégrés dans la fonction de « smile » théorique. Il apparaît alors logique que les queues de distribution soient moins épaisses relativement aux autres cas.<sup>19</sup>

19. L'estimation des autres modèles à partir d'options de deltas compris entre 0,2 et 0,8 (les options de deltas 0,1 et 0,15 étant écartées pour l'optimisation) conduit à des formes de densité assez proches de celles issues de l'approche de Malz (1996-b), bien que très légèrement moins « pointues ».

## GRAPHIQUE 3

## Densité de probabilité du DEM/FRF à un mois



Néanmoins, cette approche peut se justifier dès lors que les options de delta faibles ne sont que marginalement traitées relativement aux options proches de la monnaie. En effet, dans ce cas de figure, accorder un même poids à une option de delta 0,5 et 0,1 dans l'optimisation des autres modèles peut conduire à générer des queues de distribution trop épaisses relativement à celles anticipées par le marché.

Mais, à moins de connaître exactement les volumes traités pour chaque delta, tout schéma de pondération des volatilités implicites en fonction de leur delta respectif reste arbitraire.

En conclusion, il ressort que les modèles conduisant aux meilleurs résultats en fonction des cinq critères précités sont le mélange de lois lognormales et la diffusion à saut. Pour le premier modèle, la somme des carrés des écarts est dans tous les cas considérés inférieure aux autres méthodes ; pour la diffusion à saut, l'information délivrée par les paramètres estimés nous renseigne sur la dynamique du taux de change ; de plus, les moments empiriques ainsi que les intervalles de confiance issus de ce modèle ont des valeurs intermédiaires. On peut en outre mentionner que l'estimation de ce modèle est rapide et ne souffre pas de problèmes de minima locaux rencontrés lors de l'estimation du modèle à volatilité stochastique. Pour ces raisons, le modèle à saut est retenu dans la suite de cet article.

## Contenu informationnel de la densité de probabilité

La densité de probabilité du taux d'intérêt futur a un contenu informationnel intéressant pour la politique monétaire. La Banque d'Angleterre étudie régulièrement la forme de cette densité empirique pour effectuer des opérations sur le marché monétaire et juger de leur impact et de leur efficacité en observant la modification des anticipations que ses actions ont entraînées (Bahra, 1996). De même, pour les taux de change, l'information délivrée par la densité de probabilité peut être utilisée pour apprécier le moment propice à des interventions de change, dès lors que des tensions anticipées apparaissent dans le prix des options et conduisent à des formes inhabituelles de densité de probabilité. Par exemple, dans le cas où deux scénarii alternatifs s'affronteraient sur le marché, la courbe de densité de probabilité ferait apparaître d'éventuelles bimodalités. Plus généralement, pouvoir évaluer l'effet des interventions sur les anticipations de change constitue une information importante pour la conduite de la politique de change.

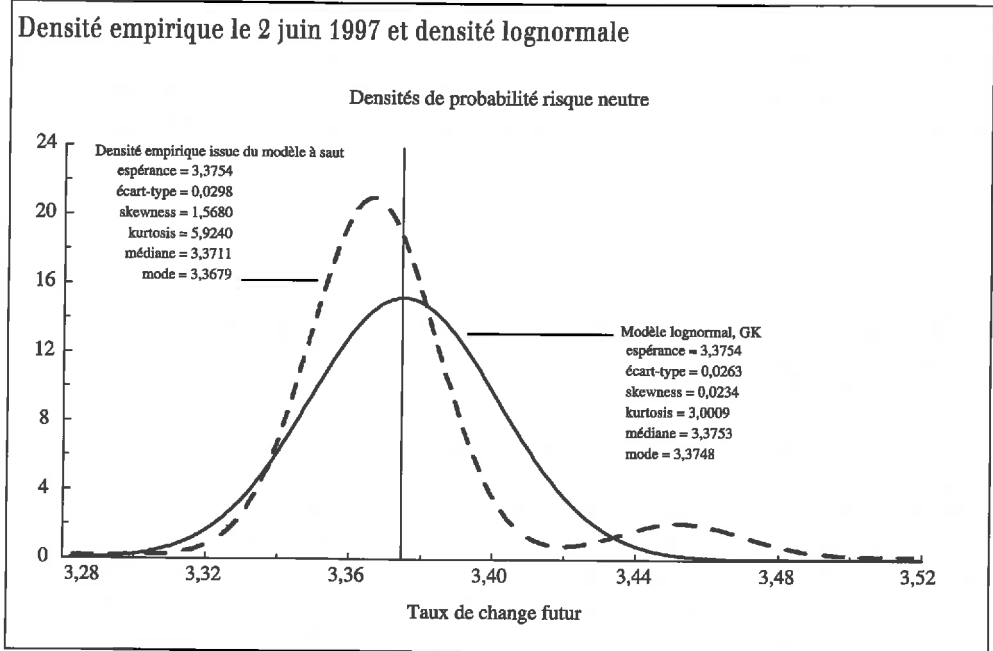
L'information délivrée par cet indicateur est examinée en trois étapes. Dans un premier temps, elle est comparée avec la référence lognormale issue du modèle standard d'évaluation des options de change. Puis, elle est analysée au travers de la modification des anticipations après le résultat des élections du 1<sup>er</sup> juin 1997. Enfin, dans la perspective de l'union monétaire, les densités de probabilité du franc contre deutschemark sont établies pour des échéances postérieures au 1<sup>er</sup> janvier 1999.

### Propriétés statistiques de la densité empirique

La densité de probabilité du taux de change futur est un résumé des anticipations du taux de change futur à un instant donné et pour une certaine maturité, différente d'une loi lognormale. La diffusion à saut, modèle retenu pour

construire cette densité empirique, autorise des fluctuations du taux de change de forte amplitude, ce qui permet de capturer d'éventuelles asymétries dans les anticipations ainsi que tout excès de kurtosis par rapport à la loi lognormale. Sur le GRAPHIQUE 4 sont représentées la densité de la loi lognormale implicite dans le modèle standard de GK et la densité implicite dans le prix des options le 2 juin 1997 pour une maturité de un mois ; ces deux courbes ont la même espérance mathématique : le taux de change à terme à un mois.

GRAPHIQUE 4



La première constatation relative à la courbe de densité de probabilité concerne son caractère asymétrique, relativement à la loi lognormale. Le coefficient d'asymétrie vaut 1,568 contre 0,0234 pour la lognormale qui est très légèrement asymétrique. Pour la densité empirique, des variations égales du taux de change anticipé n'ont donc pas la même probabilité d'occurrence selon qu'elles sont positives ou négatives : le mode (3,3679), valeur du taux de change futur pour lequel la probabilité est la plus élevée, est clairement inférieur à la médiane (3,3711) qui est elle-même inférieure au taux de change à terme (3,3754), moment du premier ordre de la densité. Pour la densité lognormale, ces trois indicateurs statistiques de dispersion sont au contraire très proches.

La densité implicite dans le prix des options révèle donc que le marché affecte une probabilité plus élevée à une faible appréciation du FRF vis-à-vis du DEM en deçà du taux de change à terme qu'à une dépréciation d'égale amplitude. Or, le marché centrant ses anticipations sur le taux de change à terme, la probabilité d'une forte dépréciation du FRF au-delà du taux de change à terme est, par construction, plus élevée que la probabilité d'une appréciation de même ampleur (la courbe est étalée à droite, du fait du skewness positif).

La dissymétrie entre les mouvements anticipés de faible et de forte amplitude est clairement mise en évidence par cette représentation des anticipations ; elle est en tout état de cause mieux révélée que par un smile de volatilité décroissant ou un « risk reversal » positif dans le cas où l'anticipation est une dépréciation de forte amplitude.

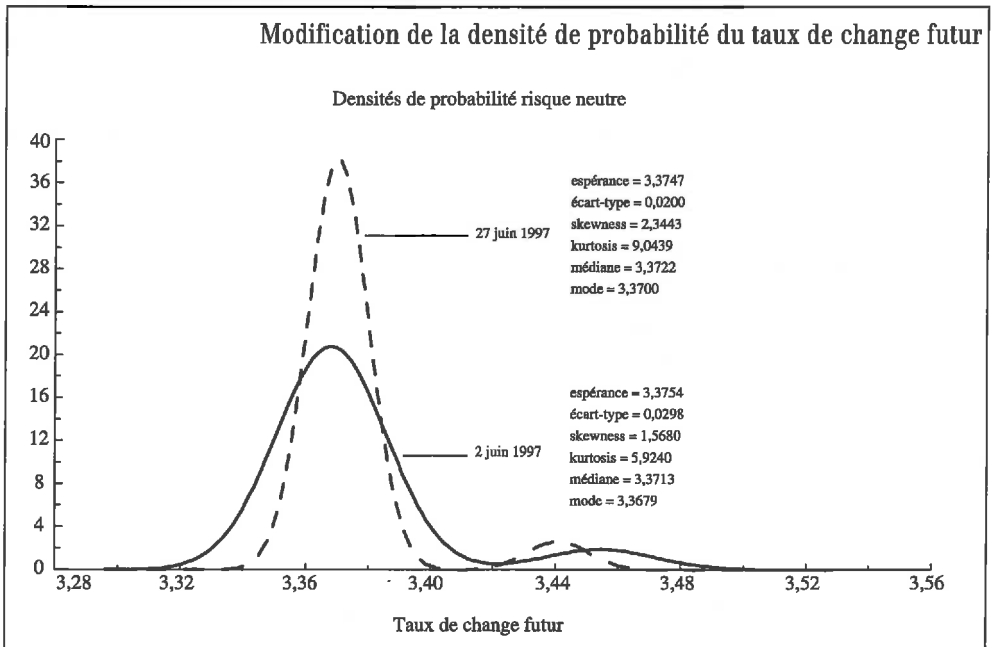
Cette densité est de plus leptokurtique, le coefficient de kurtosis étant égal à 5,924, nettement supérieur à 3, valeur du coefficient d'aplatissement dans le cas d'une loi normale. La queue de distribution est plus épaisse à droite que celle de la loi lognormale ; ainsi, des fluctuations de grande amplitude à la dépréciation du FRF sont anticipées plus fréquemment que ce que postule la loi lognormale.

### Modification des anticipations en juin 1997

Les densités de probabilité du taux de change futur se modifient au cours du temps, surtout lorsque des nouvelles non anticipées perturbent le marché. On se propose d'analyser comment le marché a réagi après l'annonce du résultat des élections législatives du 1<sup>er</sup> juin 1997, consécutive à la dissolution de l'Assemblée nationale par le Président de la République au printemps 1997.

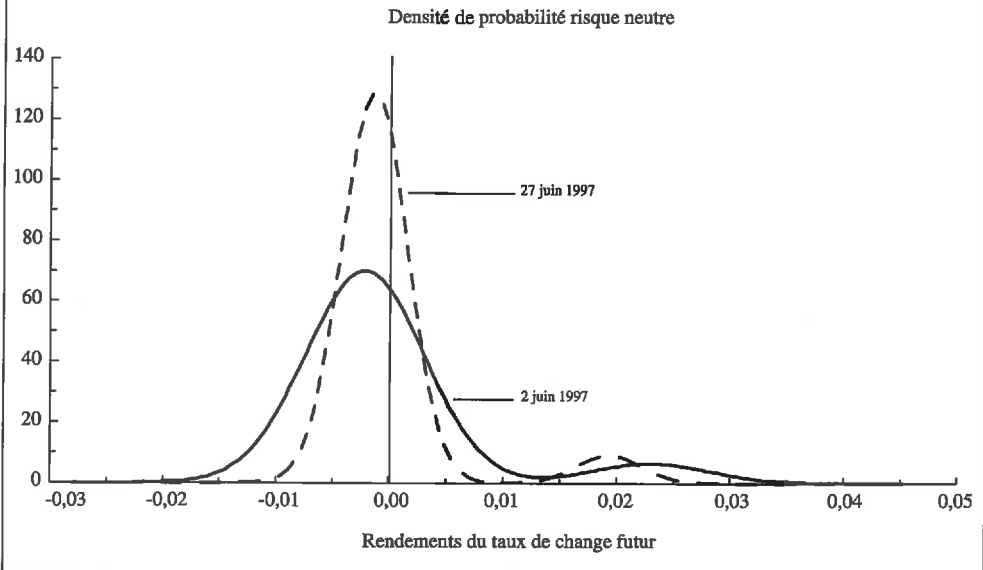
Les courbes de densité de probabilité du 2 et 27 juin (GRAPHIQUE 5), d'échéance un mois retracent la concentration des anticipations autour du taux de change à terme. La densité du 2 juin met en évidence les incertitudes perçues par le marché au lendemain des résultats des élections, sur la politique européenne du nouveau gouvernement : à cette date, la dispersion des anticipations est nettement plus marquée que le 27 juin, où la courbe est plus « pointue ». En effet, la volatilité non conditionnelle calculée à partir des paramètres estimés du modèle à saut

GRAPHIQUE 5



## GRAPHIQUE 6

## Modification de la densité de probabilité des rendements du taux de change futur



est de 3,15 % le 2 juin contre 2,11 % le 27 juin. En outre, la probabilité qu'un saut ait lieu à l'échéance d'un mois est de 8,55 % le 2 juin, susceptible d'entraîner une dépréciation du taux de change de 0,218 %, contre une probabilité de 6,55 % avec une dépréciation du DEM/FRF de 0,137 % le 27 juin 1997.<sup>20</sup> Une interprétation possible est que les conclusions du sommet d'Amsterdam, tenu les 14 et 15 juin, ont rassuré le marché.

Afin de faciliter la lecture de la modification des anticipations entre deux dates, il est commode de recourir à une représentation qui fait intervenir non pas le taux de change futur, mais ses rendements anticipés. Cette présentation permet aux deux courbes de densité d'être centrées sur leur taux de change à terme respectif, donc autour de zéro (GRAPHIQUE 6). Elle permet une lecture plus aisée non seulement de l'évolution du caractère asymétrique des densités mais aussi de la modification des queues de distribution entre deux dates, lorsque le taux de change à terme connaît une évolution marquée sur la période.

20. Une constatation contre-intuitive peut être effectuée : le coefficient d'asymétrie augmente le 27 juin par rapport au 2 juin ; il en est de même pour le kurtosis, alors même que l'incertitude générale décroît. Ce résultat est lié au mode de calcul de ces coefficients, qui sont normalisés par l'écart-type de la densité. Aussi, plus l'incertitude diminue, plus le coefficient d'asymétrie et le kurtosis croissent.

## Crédibilité de l'union monétaire européenne

A l'approche du 1<sup>er</sup> janvier 1999 et dans le cas d'une crédibilité forte de la période de transition, on devrait s'attendre à ce que la distribution de probabilité soit de plus en plus centrée sur le cours-pivot, si cette modalité de détermination des cours de conversion était choisie, ou sur la valeur de la moyenne des taux passés dans l'éventualité où ce serait la « règle Lamfalussy » qui serait retenue, la densité devenant de plus en plus « pointue » à mesure que l'on se rapproche du 1<sup>er</sup> janvier 1999.

L'observation de la densité de probabilité du mark contre franc d'échéance deux ans permet de suivre l'évolution des anticipations des opérateurs concernant les valeurs anticipées du taux de change pour une échéance postérieure à l'union monétaire. Le suivi de cet indicateur depuis janvier 1997 montre que le marché centre déjà en partie ses anticipations sur la valeur du cours-pivot. La probabilité que le taux de change à l'échéance soit inférieur au cours-pivot oscille autour de 50 %. Cette information révélée par les prix d'options est néanmoins à interpréter avec précaution, car la liquidité sur cette échéance est très faible ; son caractère représentatif des anticipations est donc bien moins fiable.

## Marges implicites anticipées et autres indicateurs synthétiques des anticipations

Le suivi dans le temps de la densité de probabilité en tant qu'indicateur des anticipations de taux de change futur se révèle complexe lorsque la période analysée est relativement longue. La construction d'intervalle de confiance ou marges implicites anticipées par le marché permet de pallier cette difficulté, en offrant une lecture plus aisée de l'évolution de la dispersion des anticipations en sus de l'indicateur traditionnel de volatilité à-la-monnaie.

Le suivi par les banques centrales de ces marges anticipées pour le taux de change futur pendant la période intérimaire jusqu'à l'instauration de la monnaie unique peut s'avérer utile pour juger de l'adhésion du marché aux taux de conversion bilatéraux qui auront été annoncés par le Conseil européen en mai 1998. Dans une situation de forte crédibilité, les marges implicites anticipées par le marché devraient se réduire progressivement jusqu'à la fixation irrévocable des parités. D'autres indicateurs issus de la densité peuvent également être suivis : la structure à terme de la dispersion des anticipations, qui illustrera les effets de la dissolution de l'Assemblée nationale sur les anticipations de change du FRF, et différents indicateurs d'asymétrie de la distribution de probabilité.

## Le contenu informationnel de différents intervalles de confiance

L'une des questions posées par l'article de Labhard et Wyplosz (1997) concerne l'existence éventuelle de bandes implicites étroites à l'intérieur des marges officielles de  $\pm 15\%$  du nouveau SME. La mise en évidence de telles

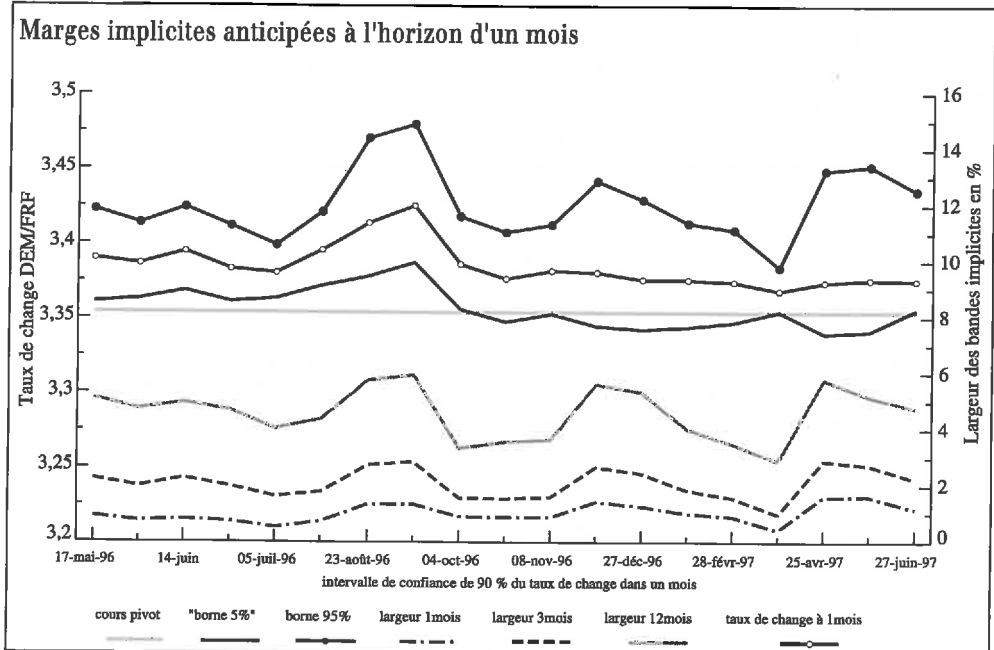
bandes fluctuantes dans le temps est importante pour une banque centrale poursuivant un objectif de change dans le SME, en ce qu'elles peuvent constituer un indicateur de crédibilité de la politique monétaire menée.

L'indicateur développé ci-après et appliqué au taux de change DEM/FRF est issu de la probabilité construite précédemment à partir des prix d'options de change. Il permet de montrer que, en tout état de cause, les opérateurs de marché croient à l'existence de telles marges implicites. Plus spécifiquement, il permet d'identifier avec une probabilité de  $x\%$  l'intervalle à l'intérieur duquel le taux de change futur est anticipé par le marché à l'échéance de l'option. Les niveaux des bornes inférieures et supérieures de la marge sont calculées sous une mesure de probabilité risque neutre ; il ne s'agit donc pas des bornes telles que le marché peut les anticiper dès lors qu'il existe une prime de risque sur le FRF. Néanmoins, il est peu vraisemblable que cette prime de risque varie beaucoup dans le temps ; aussi le graphique de marges représente-t-il assez fidèlement l'évolution des anticipations (GRAPHIQUE 7).

Trois intervalles de confiance ont été initialement considérés, concentrant respectivement une probabilité de 50 %, 90 % et 98 %. L'intérêt du suivi de ces différentes marges implicites dépend de leur capacité à retracer l'impact de chocs sur les anticipations. A cet égard, l'intervalle de 90 % apparaît le meilleur, car plus sensible aux variations du « sentiment » des marchés (GRAPHIQUE 7).

En effet, la largeur des bandes calculées à partir de l'intervalle de confiance de 50 % varie très peu sur la période, car cet intervalle est par construction peu sensible à des fluctuations de forte amplitude, anticipées avec une faible probabilité. Il sera néanmoins utilisé par la suite parce que l'intervalle interquartile constitue

GRAPHIQUE 7





un indicateur courant en statistique descriptive. La largeur de la bande à 98 %, quant à elle, fluctue moins que celle de 90 % ; cet indicateur est moins précis pour rendre compte des anticipations de variation du change d'amplitude moyenne.

Le graphique 7 présente la largeur de la bande en niveau pour une échéance d'un mois ainsi que le taux de change à terme et le cours pivot du DEM/FRF de mai 1996 à juin 1997. Au dessous, figurent également les largeurs de bandes exprimées en pourcentage du taux de change à terme de maturité un mois, trois mois et douze mois. La largeur des marges est calculée comme la moitié de la différence entre le cours plafond et le cours plancher exprimée en pourcentage du taux de change à terme.

Cette représentation des anticipations sur plusieurs échéances permet, par exemple, de déterminer si des tensions pregnantes à court terme (élargissement des marges implicites) le sont également à long terme. Dans la négative, les incertitudes sont polarisées sur un événement précis dont le dénouement est proche sans mettre en cause la politique menée sur le moyen terme. Si les tensions accrues sur le court terme se manifestent aussi sur le plus long terme et de manière amplifiée, les inquiétudes du marché peuvent alors porter sur l'orientation de la politique économique ou sur la politique monétaire menée.

### Dissolution de l'Assemblée nationale et structure à terme de la dispersion des anticipations

L'évolution de la structure à terme des anticipations d'avril à juin 1997 permet de suivre les tensions du marché liées à la dissolution de l'Assemblée nationale du 21 avril. Les GRAPHIQUES 8 sont construits à partir du premier quartile Q1 et du troisième quartile Q3<sup>21</sup>. L'écart entre ces deux quartiles définit un intervalle de confiance de 50 % autour du taux de change à terme. Sur toutes les échéances, le mode est inférieur à la médiane qui est inférieure au taux à terme, cet écart croissant avec la maturité, ce qui signale une asymétrie d'autant plus prononcée que le terme s'éloigne. En d'autres termes, la défiance vis-à-vis du FRF augmente avec l'échéance des options.

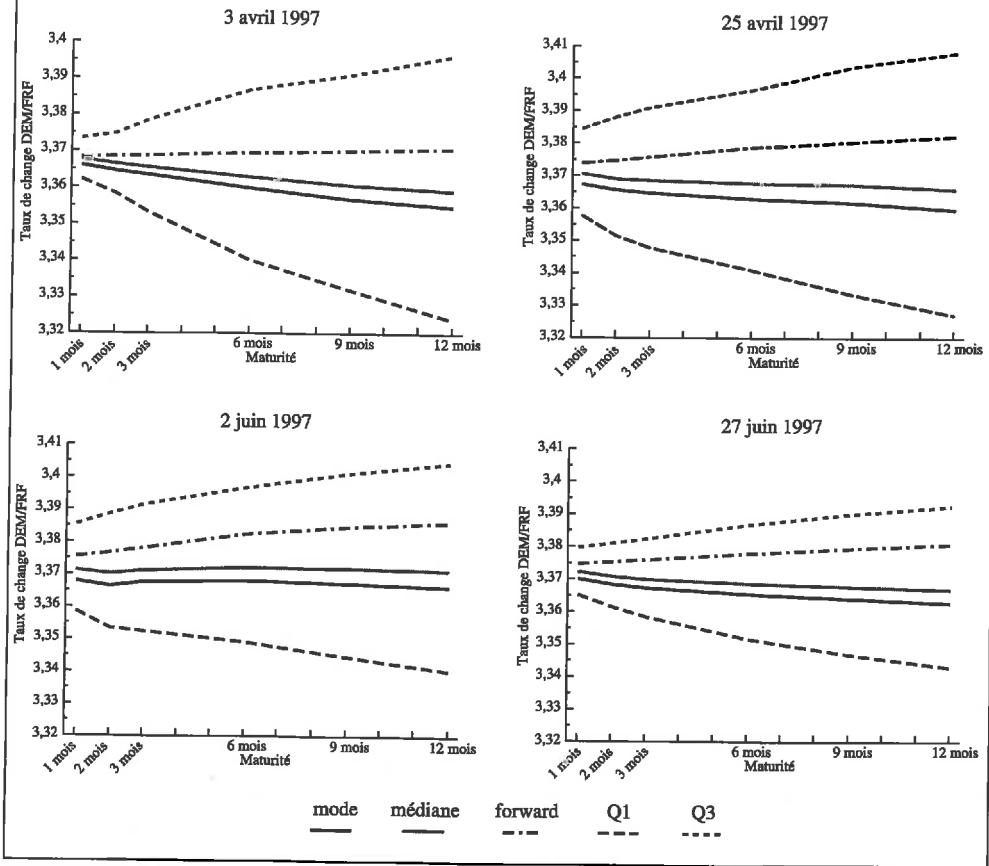
Au début du mois d'avril, la dispersion des anticipations étaient relativement faible surtout pour les échéances les plus courtes, de un à trois mois, comme l'indique le GRAPHIQUE 9 du 3 avril 1997. Le 21 avril, le Président dissout l'Assemblée nationale, ce qui provoque une incertitude accrue. Le GRAPHIQUE 8 du 25 avril 1997 rend compte de l'impact de cette annonce : même sur le court terme, les anticipations sont davantage dispersées.

Le 1<sup>er</sup> juin, l'opposition gagne les élections : le GRAPHIQUE 8 montre que le 2 juin les marchés restent dans l'expectative, la dispersion étant comparable à celle du 25 avril. A la fin du mois de juin, les craintes sur la politique européenne du nouveau gouvernement se sont apaisées après les conclusion du sommet d'Amsterdam des 14 et 15 juin. Le GRAPHIQUE montre, pour le 27 juin, cette réduction d'incertitude à court, mais aussi, à long terme.

21. Le premier quartile (troisième quartile) correspond à la valeur du taux de change pour laquelle 25 % (75 %) de la fonction de répartition y est inférieure.

## GRAPHIQUE 8

## Structure à terme de la dispersion des anticipations

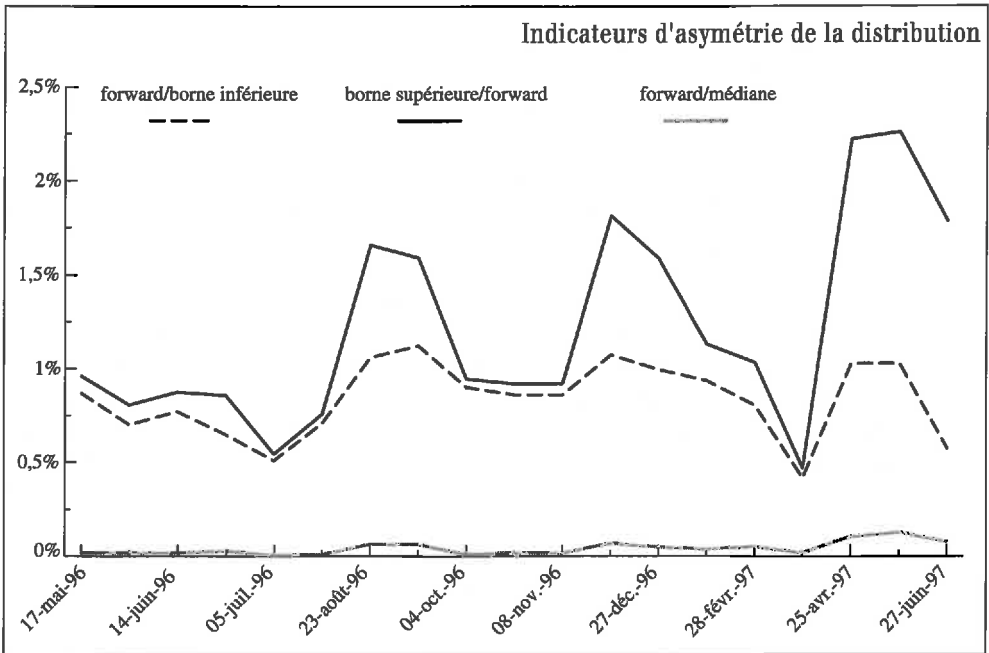


### Les différents indicateurs d'asymétrie

La position du taux de change à terme dans la bande nous renseigne sur l'asymétrie des densités de probabilité. L'existence d'une queue de distribution épaisse à droite explique pourquoi le taux de change à terme à un mois est toujours plus proche du niveau plancher de la marge implicite que du niveau plafond (GRAPHIQUE 7). Mais, le suivi de l'asymétrie des anticipations est difficile à partir de la lecture des marges implicites.

Aussi, trois indicateurs d'asymétrie partielle sont-ils calculés, à partir de l'intervalle de confiance de 90 %. Il s'agit tout d'abord du rapport du taux de change à terme à la médiane : plus l'asymétrie est marquée et plus statistiquement l'écart entre l'espérance (taux de change à terme) et la médiane s'accroît. Le second est le rapport du taux de change à terme à la borne inférieure de la marge et le troisième le rapport de la borne supérieure au taux de change à terme. Dans les situations de symétrie de la densité, ces deux rapports ont des

GRAPHIQUE 9



valeurs équivalentes. Aussi, l'asymétrie doit-elle être mesurée par l'écart entre ces deux coefficients.

Les trois indicateurs évoluent dans le même sens : en période de tensions, ces indicateurs augmentent, rendant compte de la polarisation des anticipations dans une direction particulière pour les variations de forte amplitude. Le GRAPHIQUE 9 montre que les périodes de tensions sur le DEM/FRF sont associées à des écarts nettement croissants entre le rapport de la borne supérieure au taux à terme et le rapport du taux à terme à la borne inférieure.<sup>22</sup>

## Conclusion

Plusieurs modèles permettent de recouvrir la densité de probabilité du taux de change futur. De leur comparaison, il ressort que les résultats dépendent largement des critères retenus. Si l'on considère le critère des moindres carrés, qui teste la capacité d'un modèle à s'ajuster aux prix observés, le modèle postulant un mixte de lois lognormales apparaît meilleur que les autres. Mais deux autres critères peuvent être privilégiés, la lisibilité des paramètres estimés, qui donnent une information sur la dynamique du taux de change, et la robustesse en terme de

22. Le coefficient d'asymétrie de la densité de probabilité évolue en sens inverse de ces indicateurs. Comme nous l'avons vu plus haut, la raison en réside dans le calcul même du skewness de la densité. Lorsque l'incertitude se réduit, l'écart-type de la densité baisse de même ; or, dans le calcul du skewness, cet écart-type normalise l'écart entre la série et le taux de change à terme ; aussi, plus il est faible, plus le coefficient d'asymétrie augmente. La conclusion que l'on peut tirer de cette constatation est que le skewness n'est pas un bon indicateur de l'asymétrie de la densité que l'on pourrait suivre dans le temps afin de disposer d'une idée du biais des anticipations des opérateurs.

convergence de l'algorithme d'optimisation. Dans ce cas, le modèle à saut devrait être retenu. Les estimations des différents modèles ont porté sur des périodes relativement calmes, mais on peut penser qu'en cas de fortes tensions sur le marché des changes, le modèle autorisant le taux de change à fluctuer de manière discontinue s'avère plus approprié pour rendre compte des pressions spéculatives sur une monnaie. L'idéal serait de suivre parallèlement ces deux modèles.

Le contenu informationnel de la densité de probabilité empirique est ensuite analysé sur un plan statistique en comparaison avec le modèle lognormale standard, et dans la perspective de l'union monétaire sur des échéances supérieures à la fixation irrévocable des parités. Mais, il est difficile de suivre l'ensemble des informations fournies par cette densité au cours du temps. Il convient de les synthétiser, c'est l'objectif des indicateurs telles que les bandes implicites fluctuantes dans le temps, qui permettent de disposer d'une information sur l'évolution de la dispersion des anticipations pour une échéance donnée plus précise que celle délivrée par la volatilité à-la-monnaie. Une autre représentation de la dispersion des anticipations est proposée visant à résumer les tensions en fonction de différentes échéances : la structure à terme de la dispersion des anticipations. Enfin, trois mesures d'asymétrie partielle de la densité sont établies facilitant la lecture de l'évolution des anticipations de forte amplitude dans le temps.

Ces indicateurs peuvent être particulièrement utiles pour les banques centrales, qui désirent suivre l'évolution des anticipations du marché pendant la période intérimaire jusqu'à l'instauration de la monnaie unique. Les densités de probabilité des taux de change européens peuvent en effet fournir une indication sur le degré de validation par les marchés des taux de conversion qui seront annoncés en mai 1998. Les marges implicites peuvent aussi rendre compte du degré de crédibilité de l'annonce du Conseil européen ; si celle-ci est bien accueillie par le marché, la bande anticipée devrait considérablement se réduire avec l'approche de l'échéance du 1<sup>er</sup> janvier 1999 pour se concentrer sur les cours annoncés. L'information délivrée par ces indicateurs peut également se révéler intéressante dans le cadre du SME bis, pour évaluer les probabilités affectées aux scénarii d'entrée en union monétaire de certains pays « pre-in » et plus spécifiquement aux taux de conversion anticipés de ces monnaies contre euro.

B. R.

## ANNEXE

TABLEAU 1

		Paramètres du modèle à saut dans sa version Bernouilli	
		2 juin 1997	27 juin 1997
1 mois	$\lambda$ , ET( $\lambda$ )	1,0262 (0,1107)	0,7859 (0,0352)
	k, ET(k)	0,0255 (0,0013)	0,0209 (0,0005)
	$\sigma$ , ET( $\sigma$ )	0,0180 (0,0005)	0,0100 (0,0002)
	$\lambda\tau$	0,0855	0,0655
	$\lambda\tau k$	0,0022	0,0014
	SCR	3,22e-07	2,7e-08
	$\sqrt{\sigma^2 + k^2\lambda}$	0,0315	0,0211
3 mois	$\lambda$ , ET( $\lambda$ )	0,0242 (0,0203)	0,2417 (0,0259)
	k, ET(k)	0,0501 (0,0023)	0,0418 (0,0026)
	$\sigma$ , ET( $\sigma$ )	0,0158 (0,0003)	0,0096 (0,0004)
	$\lambda\tau$	0,0604	0,0604
	$\lambda\tau k$	0,0030	0,0025
	SCR	4,3 e-07	7,59 -07
	$\sqrt{\sigma^2 + k^2\lambda}$	0,0293	0,0227
6 mois	$\lambda$ , ET( $\lambda$ )	0,1134 (0,0108)	0,1133 (0,0129)
	k, ET(k)	0,0722 (0,0039)	0,0640 (0,0043)
	$\sigma$ , ET( $\sigma$ )	0,0137 (0,0003)0	0,0101 (0,0004)
	$\lambda\tau$	0,0567	0,0567
	$\lambda\tau k$	0,0041	0,0036
	SCR	1,17 e-07	1,69 e-06
	$\sqrt{\sigma^2 + k^2\lambda}$	0,0279	0,0238
12 mois	$\lambda$ , ET( $\lambda$ )	0,0541 (0,0038)	0,0560 (0,0057)
	k, ET(k)	0,1039 (0,0043)	0,0933 (0,0058)
	$\sigma$ , ET( $\sigma$ )	0,0131 (0,0002)	0,0101 (0,0003)
	$\lambda\tau$	0,0541	0,0560
	$\lambda\tau k$	0,0056	0,0052
	SCR	1,15 e-06	2,7 e-06
	$\sqrt{\sigma^2 + k^2\lambda}$	0,0275	0,0243

TABLEAU 2

Estimation du modèle à volatilité stochastique				
	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
<b>2 juin 1997</b>				
$k^*$	3,2320	3,3073	3,3141	2,1871
$\sqrt{\theta^*}$	6,529%	3,638%	1,540%	0,823%
$\rho$	0,6500	0,6351	0,6073	0,6126
$\sigma$	0,2514	0,1632	0,1255	0,0943
$\sqrt{v}$	2,228%	2,266%	3,377%	3,850%
SCE	1e-07	9,1e-06	2,7e-05	6,1e-05
<b>27 juin 1997</b>				
$k^*$	3,2555	3,2866	3,3090	2,1167
$\sqrt{\theta^*}$	2,667%	2,108%	1,427%	0,853%
$\rho$	0,6546	0,5865	0,7775	0,7767
$\sigma$	0,1562	0,1355	0,07673	0,0579
$\sqrt{v}$	1,826%	2,108%	2,429%	2,943%
SCE	3,5e-06	1,8e-05	3,8e-05	6,8e-05

TABLEAU 3

Estimation des paramètres du modèle de Bahra				
	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
<b>2 juin 1997</b>				
$\theta$	0,8336	0,8778	0,8928	0,9328
$\alpha_1$	1,2139	1,2139	1,2142	1,2137
$\beta_1$	0,0166	0,0144	0,0125	0,0128
$\alpha_2$	10,0451,2291	1,2406	1,2533	1,2970
$\beta_2$		0,0540	0,0556	0,0427
$\alpha_2 - \alpha_1$	0,0135	0,0267	0,0391	0,0833
	2,75e-07	3,56e-07	8,03e-07	7,97e-07
<b>27 juin 1997</b>				
$\theta$	0,8773	0,8811	0,8808	0,8984
$\alpha_1$	1,2148	1,2141	1,2134	1,2126
$\beta_1$	0,0087	0,0082	0,0085	0,0090
$\alpha_2$	1,2272	1,2354	1,2448	1,2639
$\beta_2$	0,0377	0,0483	0,0491	0,0507
$\alpha_2 - \alpha_1$	0,0124	0,0213	0,0314	0,0511
	5,35e-08	4,5e-07	1,22e-06	1,81e-06

TABLEAU 4

Paramètre estimé du modèle lognormal

	1 mois	3 mois	6 mois	12 mois
<b>2 juin 1997</b>				
$\sigma$	0,02740	0,02357	0,02137	0,02059
ET( $\sigma$ )	(0,0016)	(0,0017)	(0,0018)	(0,0018)
SCR	2,5e-05	7,64e-05	1,58e-04	3,05e-04
<b>27 juin 1997</b>				
$\sigma$	0,01599	0,01651	0,01713	0,01727
ET( $\sigma$ )	(0,0014)	(0,0016)	(0,0017)	(0,0018)
SCR	1,8e-05	6,86e-05	1,43e-04	2,88e-04

Les volatilités utilisées dans l'optimisation correspondent à des deltas compris entre [0,1;0,9].

TABLEAU 5

## Moments empiriques

		ESPÉRANCE	VOLATILITÉ	SKEWNESS	KURTOSIS
<b>2 juin 1997</b>					
1 mois	lognor	3,3753	0263	0,0234	3,0009
	smile	3,3753	0,0296	1,5469	6,3082
	mixte	3,3753	0,0304	1,7827	7,8163
	jump	3,3753	0,0298	1,5680	5,9240
	vol sto	3,3753	0,0291	1,6142	7,3759
3 mois	lognor	3,3780	0,0388	0,0345	3,0021
	smile	3,3780	0,0478	1,8809	8,4392
	mixte	3,3779	0,0498	2,5070	12,583
	jump	3,3780	0,0484	2,1453	8,6709
	vol sto	3,3778	0,0448	1,7502	8,1671
6 mois	lognor	3,3823	0,0502	0,0446	3,0035
	smile	3,3823	0,0627	2,1183	9,2403
	mixte	3,3823	0,0679	3,0095	16,056
	jump	3,3823	0,0653	2,4812	10,159
	vol sto	3,3819	0,0592	1,8953	9,0573
12 mois	lognor	3,3859	0,0677	0,0600	3,0064
	smile	3,3859	0,0876	2,2460	10,101
	mixte	3,3858	0,0932	3,1572	15,971
	jump	3,3859	0,0909	2,6428	11,017
	vol sto	3,3853	0,0818	1,9549	9,4381
<b>27 juin 1997</b>					
1 mois	lognor	3,3747	0,0157	0,0139	3,0003
	smile	3,3747	0,0199	2,2698	9,9028
	mixte	3,3747	0,0206	2,7730	13,258
	jump	3,3747	0,0200	2,3234	8,9719
	vol sto	3,3743	0,0174	1,5117	6,6779
3 mois	lognor	3,3759	0,0279	0,0248	3,0012
	smile	3,3759	0,0369	2,5519	11,3042
	mixte	3,3759	0,0391	3,1123	16,4594
	jump	3,3759	0,0374	2,6888	10,6416
	vol sto	3,3754	0,0316	1,6203	7,5595
6 mois	lognor	3,3778	0,0406	0,0361	3,0023
	smile	3,3778	0,0531	2,5062	10,9979
	mixte	3,3778	0,0577	3,1566	16,8088
	jump	3,3778	0,0555	2,7964	11,3781
	vol sto	3,3772	0,0459	1,7892	7,8148
12 mois	lognor	3,3807	0,0575	0,0510	3,0046
	smile	3,3807	0,0765	2,5848	11,4602
	mixte	3,3806	0,0835	3,4112	18,4663
	jump	3,3807	0,0799	2,8607	11,7116
	vol sto	3,3801	0,0659	1,8516	8,1475



TABLEAU 6

## Estimations des marges à 90 et 99%

	INTERVALLE DE CONFIANCE DE 90%					INTERVALLE DE CONFIANCE DE 99%				
	borne inférieure	forw/borne inférieure	borne supérieure	borne supérieure /forw	largeur	borne inférieure	forw/borne inférieure	borne supérieure	borne supérieure /forw	largeur
<b>2 juin 1997</b>										
<b>1 mois</b>										
lognor	3,3323	1,293%	3,4188	1,287%	1,282%	3,3082	2,031%	3,4437	2,024%	2,008%
smile	3,3407	1,037%	3,4414	1,957%	1,492%	3,3198	1,675%	3,5031	3,783%	2,715%
mixte	3,3428	0,973%	3,4416	1,961%	1,462%	3,3228	1,582%	3,4886	3,354%	2,456%
jump	3,3411	1,025%	3,4516	2,259%	1,637%	3,3247	1,525%	3,4840	3,217%	2,360%
vol sto	3,3413	1,021%	3,4348	1,761%	1,386%	3,3175	1,745%	3,5083	3,939%	2,827%
<b>3 mois</b>										
lognor	3,3145	1,916%	3,4423	1,903%	1,892%	3,2792	3,013%	3,4794	3,000%	2,963%
smile	3,3263	1,556%	3,4792	2,996%	2,264%	3,2920	2,613%	3,6241	7,285%	4,916%
mixte	3,3236	1,638%	3,4945	3,447%	2,529%	3,2830	2,895%	3,5766	5,877%	4,345%
jump	3,3261	1,562%	3,5120	3,966%	2,752%	3,3014	2,322%	3,5776	5,907%	4,088%
vol sto	3,3258	1,570%	3,4688	2,685%	2,116%	3,2883	2,729%	3,5893	6,254%	4,455%
<b>6 mois</b>										
lognor	3,3003	2,484%	3,4655	2,461%	2,442%	3,2550	3,910%	3,5138	3,888%	3,825%
smile	3,3177	1,946%	3,5134	3,877%	2,893%	3,2719	3,373%	3,7407	5,983%	6,931%
mixte	3,3156	2,010%	3,5102	3,781%	2,876%	3,2685	3,480%	3,6435	7,723%	5,543%
jump	3,3169	1,970%	3,5721	5,612%	3,772%	0,2867	2,907%	3,6615	8,256%	5,540%
vol sto	3,3138	2,066%	3,5020	3,539%	2,782%	3,2643	3,614%	3,6749	8,654%	6,071%
<b>12 mois</b>										
lognor	3,2758	3,365%	3,4985	3,324%	3,290%	3,2153	5,308%	3,5643	5,265%	5,153%
smile	3,2967	2,709%	3,5573	5,058%	3,848%	3,2567	3,972%	3,8910	14,91%	9,368%
mixte	3,2919	2,859%	3,5795	5,715%	4,247%	3,2230	5,056%	3,7178	9,799%	7,306%
jump	3,2971	2,695%	3,6496	7,787%	5,205%	3,2567	3,969%	3,7846	11,77%	7,795%
vol sto	3,2928	2,831%	3,5510	4,873%	3,813%	3,2278	4,901%	3,8394	13,39%	9,032%
<b>27 juin 1997</b>										
<b>1 mois</b>										
lognor	3,3491	0,764%	3,4004	0,761%	0,760%	3,3347	1,198%	3,4150	1,196%	1,190%
smile	3,3555	0,572%	3,4203	1,351%	0,960%	3,3438	0,922%	3,4769	3,028%	1,971%
mixte	3,3561	0,552%	3,4197	1,333%	0,941%	3,3406	1,020%	3,5056	3,879%	2,444%
jump	3,3555	0,571%	3,4349	1,786%	1,177%	3,3464	0,845%	3,4565	2,425%	1,632%
vol sto	3,3543	0,609%	3,4131	1,140%	0,872%	3,3391	1,066%	3,4595	2,514%	1,784%
<b>3 mois</b>										
lognor	3,3303	1,370%	3,4220	1,363%	1,357%	3,3048	2,151%	3,4488	2,144%	2,133%
smile	3,3432	0,979%	3,4564	2,384%	1,676%	3,2993	2,324%	3,5862	6,227%	4,249%
mixte	3,3422	1,009%	3,4605	2,504%	1,751%	3,3148	1,845%	3,5409	4,882%	3,348%
jump	3,3424	1,003%	3,4939	3,495%	2,244%	3,3273	1,463%	3,5336	4,670%	3,056%
vol sto	3,3366	1,179%	3,4441	2,019%	1,592%	3,2895	2,628%	3,5399	4,858%	3,710%
<b>6 mois</b>										
lognor	3,3115	2,004%	3,4451	1,990%	1,977%	3,2747	3,152%	3,4838	3,137%	3,096%
smile	3,3299	1,441%	3,4967	3,519%	2,470%	3,2702	3,293%	3,6868	9,145%	6,167%
mixte	3,3283	1,489%	3,5012	3,650%	2,558%	3,2911	2,637%	3,6006	6,595%	4,582%
jump	3,3280	1,500%	3,5527	5,175%	3,326%	3,3056	2,187%	3,6180	7,109%	4,625%
vol sto	3,3294	1,454%	3,4719	2,783%	2,108%	3,2961	2,482%	3,5887	6,238%	4,330%
<b>12 mois</b>										
lognor	3,2871	2,851%	3,4658	2,821%	2,647%	3,2354	4,491%	3,5316	4,461%	4,380%
smile	3,3112	2,101%	3,5429	4,795%	3,427%	3,2535	3,910%	3,8497	13,87%	8,816%
mixte	3,3092	2,161%	3,5597	5,292%	3,704%	3,2578	3,774%	3,7959	12,28%	7,958%
jump	3,3095	2,153%	3,6330	7,460%	4,784%	3,2781	3,130%	3,7296	0,32%	6,677%
vol sto	3,3118	2,082%	3,5164	4,012%	3,035%	3,2691	3,414%	3,7242	10,16%	6,675%

## RÉFÉRENCES

- Abken P. (1995), « Using Eurodollar Futures Options: Gauging the Market's View of Interest Rate Movements », *Economic Review*, Federal Reserve Bank of Atlanta.
- Abramowitz M. & I. Stegun (1964), *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, INC., New York.
- Aït-Sahalia Y. & A.W. Lo (1995), « Nonparametric Estimation of State-Price Densities Implicit in Financial Asset Prices », *NBER Working Paper* 5351.
- Ball C. & A. Roma (1994), « Stochastic Volatility Option Pricing », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, pp.589-607.
- Ball C. & W. Torous (1985), « On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Pricing », *Journal of Finance*, 50, pp.155-173.
- Bates D. (1991), « The Crash of '87: Was It Expected? The Evidence from Options Markets », *Journal of Finance*, July, 46, pp.1009-1044.
- Bates D. (1996), « Jumps and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in PHLX Deutschemark Options », *Journal of Financial Studies*, Spring, 9, pp.69-107.
- Bahra B. (1996), « Probability Distributions of Future Asset Prices Implied by Option Prices », *Bank of England Quarterly Bulletin*, août, pp. 229-311.
- Bertola G. & R.J. Caballero (1991), « Target Zones and Realignments », *CEPR Discussion Papers*, n° 398, mars, Londres : Center for Economic Policy Research.
- Bertola G. & L.E.O. Svensson (1993), « Stochastic Devaluation Risk and The Empirical Fit of Target Zone Models », *Review of Economic Studies*, juillet, 60, pp. 689-712.
- Black F. & M. Scholes (1973), « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy*, 81, pp. 621-651.
- Boothe P. & D. Glassman (1987), « The Statistical Distribution of Exchange Rates: Empirical Evidence and Economic Implications », *Journal of International Economics*, 22, pp. 297-319.
- Breeden D. & R. Litzenberger (1978), « Price of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices », *Journal of Business*, octobre, 51, pp. 621-51.
- Campa J. & K. Chang (1996), « Arbitrage-Based Tests of Target-Zone Credibility : Evidence from ERM Cross Rates Options », *American Economic Review*, septembre, 86, pp.726-740.
- Chesnay M. & L. Scott (1989), « Pricing European Currency Options: A Comparison Of The Modified Black-Scholes And A Random Variance Model », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, pp. 267-284.
- Chesnay M., B. Marois & R. Wojakowski (1997), *Les options de change*, Paris : Economica.
- Dumas B., L.P. Jennergren & B. Näslund (1992), « Currency Option Pricing in Credible Target Zone », *Cahier de Recherche* n° 449, Jouy-en-Josas : Ecole des Hautes Etudes Commerciales.
- Dumas B., L.P. Jennergren & B. Näslund (1993), « Realignment Risk and Currency Option Pricing in Target Zones », *Cahier de Recherche*, n° 478, Jouy-en-Josas : Ecole des Hautes Etudes Commerciales.
- Garman M. & S. Kohlhagen (1983), « Foreign Currency Option Values », *Journal of International Money and Finance*, décembre, 2, pp. 231-237.
- Gesser V. & P. Poncet (1996), *Volatility Patterns: Theory and Evidence From The Foreign Option Market*, mimeo.
- Heston S.L. (1993), « A Closed Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options », *Review of Financial Studies*, 6, pp. 327-343.
- Hsieh D. (1988), « The Statistical Properties of Daily Foreign-Exchange Rates : 1974-1983 », *Journal of International Economics*, février 24, pp. 129-145.

- Hull J. & A. White (1987), « The Pricing of Options on Assets With Stochastic Volatilities », *Journal of Finance*, 42, pp. 281-300.
- Hutchinson J.M., A.W. Lo & T. Poggio (1994), « A Non Parametric Approach to Pricing and Hedging Derivative Securities Via Learning Networks », *Journal of Finance*, vol. 49, n° 3.
- Jondeau E. & M. Rockinger (1997), *Estimation et interprétations des densités neutres au risque : une comparaison de méthodes*, Banque de France, mimeo.
- Jarrow R. & A. Rudd (1982), « Approximate Valuation for Arbitrary Stochastic Processes », *Journal of Financial Economics*, pp. 347-369.
- Jorion P. (1988), « On Jump Processes in The Foreign Exchange and Stock Markets », *Review of Financial Studies*, hiver, 1, pp. 427-445.
- Krugman P. (1991), « Target Zone and Exchange Rate Dynamics », *Quarterly Journal of Economics*, août, 106, pp.669-682.
- Jackwert J.C. & Rubinstein M. (1996), « Recovering Probability Distributions from Contemporaneous Security Prices », *Journal of Finance*, 51, pp. 1611-1631.
- Lahard V. & C. Wyplosz (1996), « The New EMS : Narrow Bands Inside Deep Bands », *American Economic Review : Papers and Proceedings*.
- Malz A. (1996-a), « Using Option Prices to Estimate Realignment Probabilities in the European Monetary System: the Case of Sterling-Mark », *Journal of International Money and Finance*, vol. 15, n° 5, pp. 717-748.
- Malz A. (1996-b), « Option-Based Estimates of The Probability Distribution of Exchange Rates and Currency Returns », Federal Reserve Bank of New York, mimeo.
- Melick W.R. et Thomas C.P., (1997), « Using options prices to infer PDF's for asset prices: an application to oil prices during the Gulf crisis », *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 32, pp. 91-116.
- Melino A. & S. Turnbull (1990), « Pricing Foreign Currency Options Which Stochastic Volatility », *Journal of Econometrics*, 45, pp. 239-265.
- Merton R. (1976), « Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous », *Journal of Financial Economics*, janvier-mars, 3, pp. 125-144.
- Neuhaus H. (1995), « The Information Content of Derivatives for Monetary Policy », *Discussion Paper 3/95*, Economic Research Group, Deutsche Bundesbank.
- Pages H. (1996), « Is There a Premium for Currencies Correlated with Volatility? Some Evidence from Risk Reversal », *Note d'Etudes et de Recherche* n° 34, Banque de France.
- Rose A. & L.E.O. Svensson (1994), « Exchange Rate Credibility Before the Fall », *European Economic Review*, juin, 38, pp. 1185-216.
- Rose A. & L.E.O. Svensson (1995), « Expected and Predicted Realignments: the FF/DM Exchange Rate during the EMS, 1979-1993 », *Scandinavian Journal of Economics*, juin, 97, pp. 173-200.
- Rubinstein M. (1994), « Implied Binomial Trees », *Journal of Finance*, vol. 69, n° 3.
- Shimko D. (1993), « Bounds of Probability », *Risk* 6, n° 4, pp. 33-37.
- Söderlind P. & L.E.O. Svensson (1997), « New Techniques to Extract Market Expectations from Financial Instruments », *CEPR Discussion Paper* n° 1556, Londres : Center for Economic Policy Research.
- Svensson L.E.O. (1991), « The Simplest Test of Target Zone Credibility », *IMF Staff Papers*, septembre, 38, pp. 655-65, Washington : FMI.
- Svensson L.E.O. (1993), « Assessing Target Zone Credibility: Mean Reversion and Devaluation Expectations in the ERM, 1979-1992 », *European Economic Review*, mai, 37, pp. 763-93.
- Wiggins J. (1987), « Options Values Under Stochastic Volatility : Theory and Empirical Estimates », *Journal of Financial Economics*, 19, pp. 351-372.

